Matematický popis proudění a přestupu tepla ve výpočetní dynamice tekutin (CFD)

Jan Kracík (jan.kracik@tul.cz)

Obsah přednášky

- Základní dělení proudění
- Eulerův a Lagrangeův popis
- Zákony zachování hmoty, hybnosti a energie
- Zachování obecné veličiny

Úvodní pojmy

- Navier-Stokesovy (N-S) rovnice pro popis proudění.
- Tekutiny jsou látky, které se trvale nedeformují pod zatížením na rozdíl od tuhých látek.
- Tekutiny jsou uvedeny do pohybu, pokud na ně působí vnější síly.
- Tuhé látky zaujímají definovaný tvar, tekutiny nikoliv.
- V inženýrské praxi se zaměřujeme na makrospické chování tekutin.
- Předpoklad kontinua.

Použité značení:

1. Skalární veličina - a nebo (a)
2. Vektorová veličina - $\mathbf{a}$ nebo $[\mathbf{a}]$
3. Tenzor 2. řádu - $\{\mathbf{A}\}$ nebo $\{\boldsymbol{\alpha}\}$

Dělení proudění

- Dělení dle dimenze problému:
  - **Jednodimenzionální** proudění (1D)
  - **Vícedimenzionální** proudění (2D, 3D)

- Dělení dle závislosti na čase:
  - **Stacionární** proudění
  - **Nestacionární** proudění

- Dělení dle počtu fází:
  - **Jednofázové** proudění
  - **Vícefázové** proudění

Dělení proudění (2)

- Dělení dle uvažování viskozity:
  - **Ideální** (nevazké) proudění
  - **Reálné** (vazké) proudění

- Dělení dle chování viskozity:
  - Proudění **Newtonovských** tekutin
  - Proudění **Nenewtonovských** tekutin

- Dělení dle stupně turbulence (Reynoldsova čísla):
  - **Laminární** proudění
  - **Přechodové** proudění
  - **Turbulentní** proudění

Dělení proudění (3)

- Dělení dle stlačitelnosti:
  - Proudění **nestlačitelných** tekutin (Ma $\leq 0{,}3$)
  - Proudění **stlačitelných** tekutin (Ma $> 0{,}3$)
- Dělení proudění dle rychlosti stlačitelné tekutiny:
  - Proudění **podzvukové (subsonické)** (Ma < 1)
  - Proudění **zvukové (transsonické)** (Ma $= 0{,}9$ až $1{,}1$)
  - Proudění **nadzvukové (supersonické)** ($1 <$ Ma < 5)
  - Proudění **hypersonické** (Ma > 5)
- Dělení dle rotace částic tekutin:
  - **Nerotační** (potenciální) proudění ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$)
  - **Rotační** proudění ($\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$)

Dělení proudění (4)

- Klasifikace proudění z hlediska parciálních diferenciálních rovnic, které jej popisují:
  - Proudění popsané **eliptickým** typem rovnic $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = f\right)$
  - Proudění popsané **parabolickým** typem rovnic $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)$
  - Proudění popsané **hyperbolickým** typem rovnic $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)$

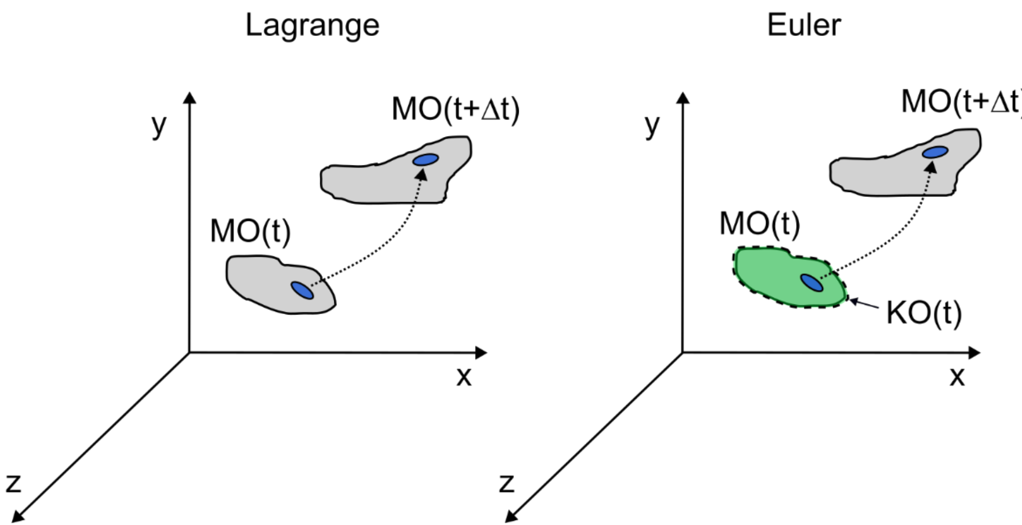
- Každý z uvedených typů rovnic vyžaduje speciální přístup při řešení.

- N-S rovnice jsou nelineární parciální diferenciální rovnice 2. řádu s obecně 4 nezávislými proměnnými (x, y, z, t).

Eulerův a Lagrangeův popis

- Zákony zachování pro popis proudění a přenosu tepla mohou být formulovány 2 odlišnými přístupy.

- **Lagrange** = Materiálový objem (MV), **Euler** = Kontrolní objem (CV).



Eulerův a Lagrangeův popis (2)

- Proměnné jsou funkcí polohy (***x***) a času (*t*), rychlost proudění je pak ***v****(**x**, t)*.

- 2 uvedené přístupy jsou vzájemně provázány následovně:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{x_0}, \mathrm{t}), \mathrm{t}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \mathbf{x}(\mathbf{x_0}, \mathrm{t}) \tag{1}$$

$$\mathbf{x}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \mathrm{x}(\mathrm{t})\mathbf{i} + \mathrm{y}(\mathrm{t})\mathbf{j} + \mathrm{z}(\mathrm{t})\mathbf{k} \tag{2}$$

- V závislosti na zvoleném přístupu jsou proměnné sledovány v kontrolním objemu či protékané oblasti (Euler), nebo sledováním materiálového objemu (Lagrangian).

- **Pro CFD se zásadně využívá Eulerova přístupu** — metoda konečných objemů (MKO).

- Pro strukturální analýzu je hojně využíván Lagrangeův přístup — metoda konečných prvků (MKP).

Eulerův a Lagrangeův popis (3)

- Pro obecnou proměnnou φ = φ(x, y, z, t) platí:

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{MV} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{u} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{w} =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \qquad (3)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}_{\text{Lokální změna veličiny v čase}} + \underbrace{\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi}_{\text{Konvektivní změna veličiny}}$$

- φ = φ(x, y, z, t) představuje obecně jakoukoliv proměnnou, skalár nebo vektor, např. rychlost, tlak, teplota, …

Zákon zachování hmoty

- Rovnice kontinuity popisuje **zachování hmoty**.

$$\left(\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathrm{MV}} = 0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}(\rho V)}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathrm{MV}} = 0$$

Zachování hmoty

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla \cdot [\rho \mathbf{v}]}_{\text{Konvektivní člen}} = 0} \qquad (4)$$

- V případě absence výrazných změn tlaku nebo teploty můžeme předpokládat nestlačitelnou tekutinu:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad (5)$$

Zákon zachování hybnosti

- Zachování **lineární hybnosti**, tj. **p** = m**v**.

$$\left(\frac{\mathrm{d}[m\mathbf{v}]}{\mathrm{d}t}\right)_{MV} = \left(\int_V \mathbf{f}\,\mathrm{d}V\right)_{MV} = \int_V \mathbf{f}\,\mathrm{d}V$$

$$\left(\int_V \frac{\mathrm{d}[\rho\mathbf{v}]}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V\right)_{MV} = \int_V \mathbf{f}\,\mathrm{d}V$$

$$\underbrace{\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\}}_{\text{Konvektivní člen}} = \underbrace{\mathbf{f}}_{\text{Vnější síly}} \qquad (6)$$

Zákon zachování hybnosti (2)

- Vnější síly jsou děleny na **plošné** ($\mathbf{f_s}$) a **objemové** ($\mathbf{f_b}$).

$$\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial t} + \nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = \sum_i \mathbf{f_i} = \mathbf{f_s} + \mathbf{f_b} \tag{7}$$

- V tomto tvaru je jednotkou každého členu v rovnici N/m^3.

- $\mathbf{f_b}$ obvykle zahrnuje pouze gravitační sílu.

$$\mathbf{f_b} = [\rho\mathbf{g}] \tag{8}$$

- Ve speciálních případech můžou být zahrnuty i další objemové síly.

- $\mathbf{f_s}$ zahrnuje síly působící na kontrolní objem vlivem tlaku a tečného napětí (vazkost).

$$\mathbf{f_s}\mathrm{d}V = \{\boldsymbol{\sigma}\}\cdot\mathbf{dS} = \{\boldsymbol{\sigma}\}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S \tag{9}$$

Zákon zachování hybnosti (3)

- Aplikací Gaussovy-Ostrogradského věty získáme

$$\int_{\mathbf{V}} \mathbf{f_s} \mathrm{dV} = \int_{\mathbf{S}} \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \mathbf{n} \mathrm{dS} = \int_{\mathbf{V}} \nabla \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} \mathrm{dV} \tag{10}$$

- $\mathbf{f_s}$ může být vyjádřeno následovně:

$$\mathbf{f_s} = \nabla \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} \tag{11}$$

- Po úpravách a dosazení máme následující tvar N-S rovnice:

$$\frac{\partial[\rho \mathbf{v}]}{\partial \mathrm{t}} + \nabla \cdot \{\rho \mathbf{v}\mathbf{v}\} = \mathbf{f_s} + \mathbf{f_b} = \nabla \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} + [\rho \mathbf{g}] \tag{12}$$

- Tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ je vyjádřen jako:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = -\mathrm{p}\{\mathbf{I}\} + \{\boldsymbol{\tau}\} \tag{13}$$

Zákon zachování hybnosti (4)

- Zákon **zachování hybnosti** může být vyjádřen následovně:

Zachování hybnosti

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial t}}_{\substack{\text{Nestacionární}\\ \text{člen}}} + \underbrace{\nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\}}_{\substack{\text{Konvektivní}\\ \text{člen}}} = \underbrace{-\nabla p}_{\substack{\text{Tlakové}\\ \text{síly}}} + \underbrace{\nabla\cdot\{\boldsymbol{\tau}\}}_{\substack{\text{Vazké}\\ \text{síly}}} + \underbrace{[\rho\mathbf{g}]}_{\substack{\text{Gravitační}\\ \text{síly}}}} \tag{14}$$

- V případě newtonovských tekutin může být tenzor tečných napětí vyjádřen takto:

$$\{\boldsymbol{\tau}\} = \mu\left(\{\nabla\mathbf{v}\} + \{\nabla\mathbf{v}\}^{\mathbf{T}}\right) - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{v})\{\mathbf{I}\} \tag{15}$$

- Konečný tvar zákonu zachování hybnosti pro newtonovskou tekutinu:

$$\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial t} + \nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = -\nabla p + \nabla\cdot\left\{\mu\left(\{\nabla\mathbf{v}\} + \{\nabla\mathbf{v}\}^{\mathbf{T}}\right)\right\} - \nabla\cdot\left\{\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{v})\{\mathbf{I}\}\right\} + [\rho\mathbf{g}] \tag{16}$$

Zákon zachování energie

- Zachování energie vychází z 1. zákona termodynamiky vyjádřeného ve formě celkové energie $E_{total} = m(e_{internal} + 0.5\,|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{v}|)$:

1. Zákon termodynamiky

$$\boxed{\underbrace{\left(\frac{\mathrm{dE_{total}}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathrm{MV}}}_{\text{Rychlost změny celkové energie}} = \underbrace{\dot{\mathrm{Q}}}_{\text{Teplo dodané do systému}} - \underbrace{\dot{\mathrm{W}}}_{\text{Práce odvedená systémem}}} \qquad (17)$$

- Oba členy na pravé straně rovnice (17) jsou složeny ze 2 částí:

$$\left(\frac{\mathrm{dE_{total}}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathrm{MV}} = \dot{\mathrm{Q}}_{\mathrm{s}} + \dot{\mathrm{Q}}_{\mathrm{b}} - \dot{\mathrm{W}}_{\mathrm{s}} - \dot{\mathrm{W}}_{\mathrm{b}} \qquad (18)$$

- Míra odvedené práce za čas = výkon.

$$\dot{\mathrm{W}}_{\mathrm{s}} = -\int_{\mathrm{S}} [\mathbf{f_S} \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{dS} \qquad (19) \qquad \dot{\mathrm{W}}_{\mathrm{b}} = -\int_{\mathrm{V}} (\mathbf{f_b} \cdot \mathbf{v})\mathrm{dV} = -\int_{\mathrm{V}} ([\rho\mathbf{g}] \cdot \mathbf{v})\mathrm{dV} \qquad (20)$$

Zákon zachování energie (2)

- Výkon plošných sil je vyjádřen jako:

$$\dot{\mathrm{W}}_s = -\int_s [\mathbf{f_S} \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_s [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n}\mathrm{dS} = -\int_V \nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}]\mathrm{dV} =$$

$$= -\int_V \nabla \cdot [\{-\mathrm{p}\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}\} \cdot \mathbf{v}]\mathrm{dV} = -\int_V (-\nabla \cdot [\mathrm{p}\mathbf{v}] + \nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}])\mathrm{dV} \tag{21}$$

- Tepelný zdroj v kontrolním objemu:

$$\dot{\mathrm{Q}}_b = \dot{\mathrm{Q}}_V = \int_V \dot{\mathrm{q}}_V \mathrm{dV} \tag{22}$$

- Prostup tepla plochou kontrolního objemu je vyjádřen:

$$\dot{\mathrm{Q}}_s = -\int_s [\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{s}] \cdot [\mathrm{d}\mathbf{S}] = -\int_s [\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{s}] \cdot [\mathbf{n}]\mathrm{dS} = -\int_V \nabla \cdot [\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{s}]\mathrm{dV} \tag{23}$$

Zákon zachování energie (3)

- Zákon **zachování energie** je po dosazení a úpravách vyjádřen jako:

$$\left(\frac{dE_{total}}{dt}\right)_{MV} = \int_V \left(\frac{\partial(\rho e_{total})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho e_{total}\mathbf{v}]\right) dV = \tag{24}$$

$$= -\int_V \nabla \cdot [\dot{\mathbf{q}}_s] dV + \int_V \dot{q}_V dV + \int_V (-\nabla \cdot [p\mathbf{v}] + \nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) dV + \int_V ([\rho\mathbf{g}] \cdot \mathbf{v}) dV$$

Zachování energie

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial(\rho e_{total})}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla \cdot [\rho e_{total}\mathbf{v}]}_{\text{Konvektivní člen}} = \underbrace{-\nabla \cdot [\dot{\mathbf{q}}_s]}_{\text{Tepelný tok stěnami objemu}} + \underbrace{\dot{q}_V}_{\text{Tepelný zdroj v objemu}} \underbrace{- \nabla \cdot [p\mathbf{v}]}_{\text{Výkon tlakových sil}} + \underbrace{\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]}_{\text{Výkon vazkých sil}} + \underbrace{([\rho\mathbf{g}] \cdot \mathbf{v})}_{\text{Výkon gravitačních sil}}} \tag{25}$$

Základní zákony zachování při proudění tekutin

Zachování hmoty

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla \cdot [\rho \mathbf{v}]}_{\text{Konvektivní člen}} = 0} \qquad (26)$$

Zachování hybnosti

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial [\rho \mathbf{v}]}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla \cdot \{\rho \mathbf{v}\mathbf{v}\}}_{\text{Konvektivní člen}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{Tlakové síly}} + \underbrace{\nabla \cdot \{\boldsymbol{\tau}\}}_{\text{Vazké síly}} + \underbrace{[\rho \mathbf{g}]}_{\text{Gravitační síly}}} \qquad (27)$$

Zachování energie

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial (\rho e_{total})}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla \cdot [\rho e_{total} \mathbf{v}]}_{\text{Konvektivní člen}} = \underbrace{-\nabla \cdot [\dot{\mathbf{q}}_s]}_{\text{Tepelný tok stěnami objemu}} + \underbrace{\dot{q}_V}_{\text{Tepelný zdroj v objemu}} \underbrace{- \nabla \cdot [p \mathbf{v}]}_{\text{Výkon tlakových sil}} + \underbrace{\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]}_{\text{Výkon vazkých sil}} + \underbrace{([\rho \mathbf{g}] \cdot \mathbf{v})}_{\text{Výkon gravitačních sil}}} \qquad (28)$$

Zachování obecné veličiny

- **Pro obecnou proměnnou φ = φ(x, y, z, t)** platí následující rovnice:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\varphi)}_{\text{Konvektivní člen}} = \underbrace{\nabla\cdot\left(\Gamma_{\varphi}\nabla\varphi\right)}_{\text{Difúzní člen}} + \underbrace{S_{\varphi}}_{\text{Zdrojový člen}}} \qquad (29)$$

- φ může představovat skalární nebo vektorovou veličinu.
- Tato rovnice je velice důležitá při diskretizaci jednotlivých členů v CFD.

Shrnutí přednášky

- Základní dělení proudění
- Lagrangeův a Eulerův popis
- Základní zákony zachování při proudění tekutin a přenosu tepla

Děkuji za pozornost!