

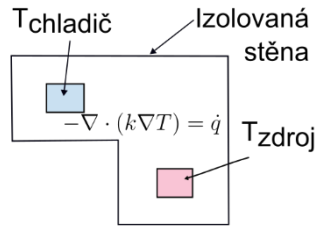
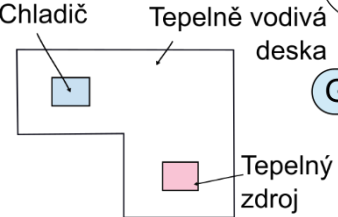
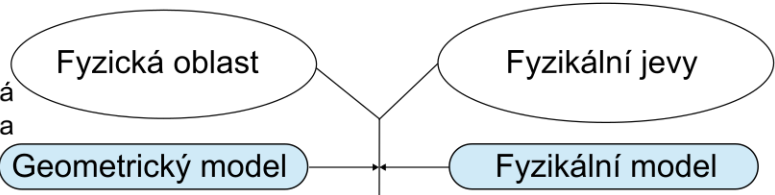


Diskretizační proces a řešení systému rovnic

Obsah přednášky

- Proces diskretizace
- Geometrický a fyzikální model
- Diskretizace oblasti (domény) a diskretizace rovnic
- Topologie a konektivita výpočetní sítě
- Řešení diskretizovaných rovnic

Proces diskretizace krok po kroku



Soustava parciálních diferenciálních rovnic definovaná ve výpočetní oblasti

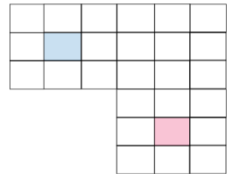


- Strukturované sítě
- Nestrukturované sítě
- Blokové sítě
- Hybridní sítě
- Překrývající se sítě

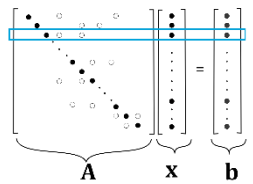
- M. konečných diferencí
- M. konečných prvků
- M. konečných objemů

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + Q$$

$$a_P \phi_P + \sum_{nb=1}^N a_{nb} \phi_{nb} = b_P$$

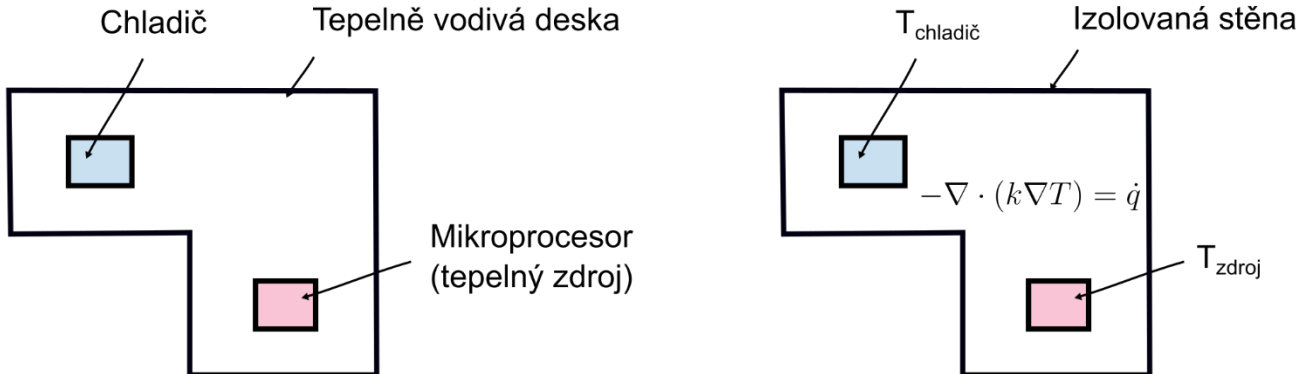


- Přímé metody
- Iterativní metody
- Vícesítové metody (Multigrid)



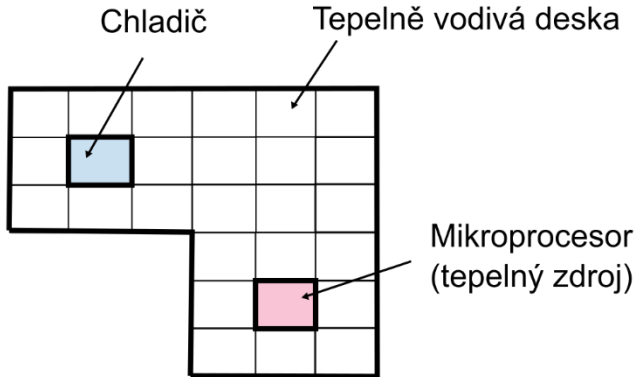
Geometrický vs fyzikální model

- Dvě úrovně modelování:
 - **geometrický model**
 - **fyzikální model**
- Vždy je snaha zanedbat, zjednodušit co nejvíce to lze (3D vs 2D, symetrie, apod.).



Diskretizace oblasti vs diskretizace rovnic

- Geometrický model (oblast) musí být rozdělen na konečný počet podoblastí (objemů/elementů/buněk) a parciální diferenciální rovnice musí být převedeny do algebraické podoby.
- Numerické řešení diskretizovaných diferenciálních rovnic spočívá v hledání hodnot závisle proměnné veličiny ϕ ve specifikovaných bodech výpočetní sítě, což můžou být středy objemů nebo jejich uzly (méně časté v MKO).



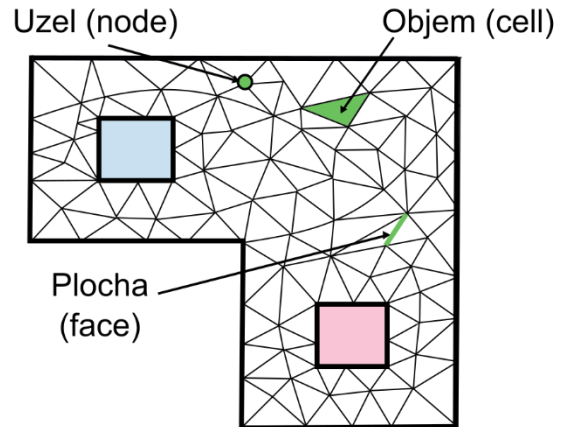
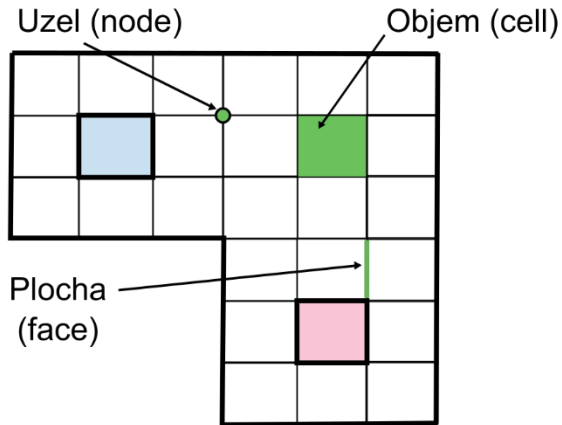
$$\frac{\partial (\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + Q$$



$$a_P\phi_P + \sum_{nb=1}^N a_{nb}\phi_{nb} = b_P$$

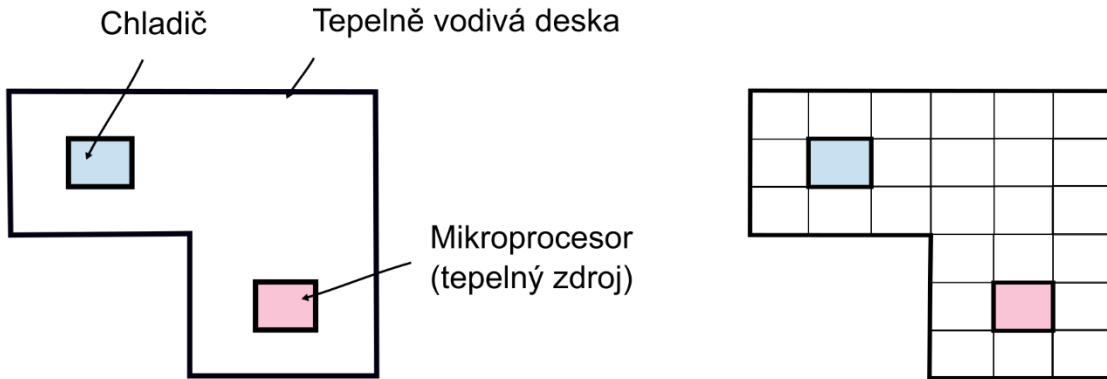
Názvosloví sítě a typy elementů

- Oblast může být rozdělena na podoblasti rovnoměrně nebo nerovnoměrně.
- Používají se **strukturované**, **nestrukturované** a **hybridní** typy sítí.
- Síť je tvořena konečnými objemy, jejich hraničními plochami a uzly. Objemy, plochy a uzly jsou vnitřní a hraniční (okrajové podmínky).



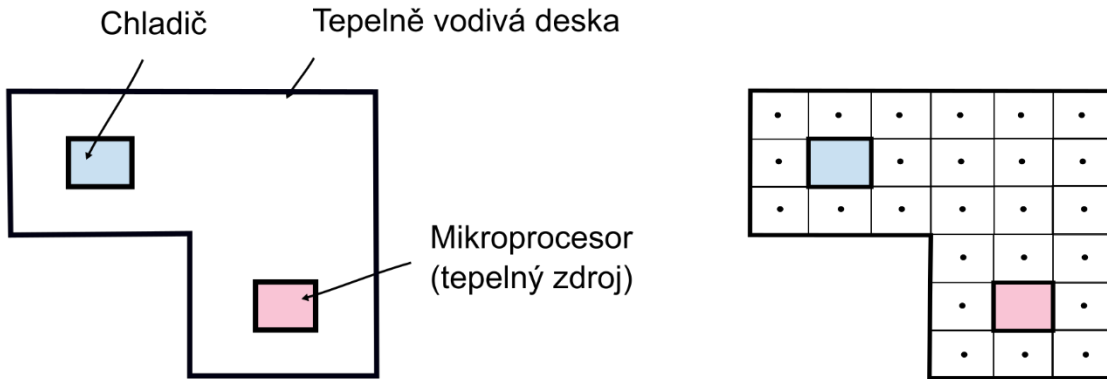
Diskretizace oblasti – uložené informace o proměnných

- Hodnoty proměnných jsou obvykle uloženy ve středech objemů (Ansys Fluent, OpenFOAM).
- Ansys CFX ukládá hodnoty proměnných v uzlech jednotlivých objemů.
- Obecně platí, že objemy se nesmí překrývat ani chybět (ale jsou výjimky).



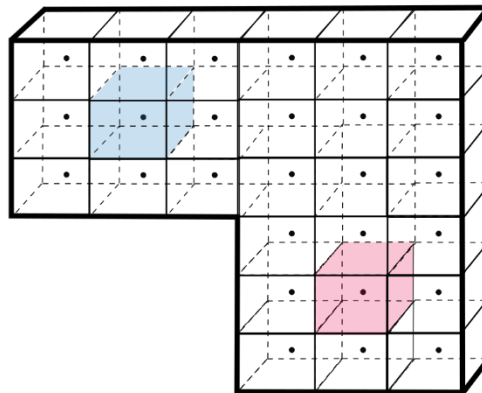
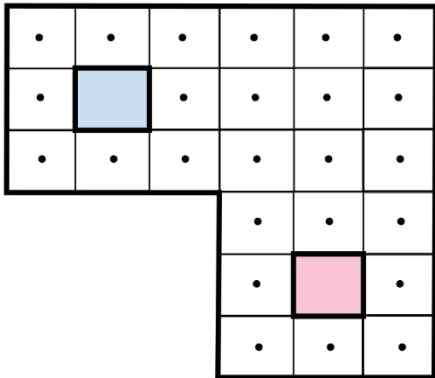
Diskretizace oblasti – uložené informace o proměnných

- Hodnoty proměnných jsou obvykle uloženy ve středech objemů (Ansys Fluent, OpenFOAM).
- Ansys CFX ukládá hodnoty proměnných v uzlech jednotlivých objemů.
- Obecně platí, že objemy se nesmí překrývat ani chybět (ale jsou výjimky).



Dimenze oblasti - 1D, 2D, 3D

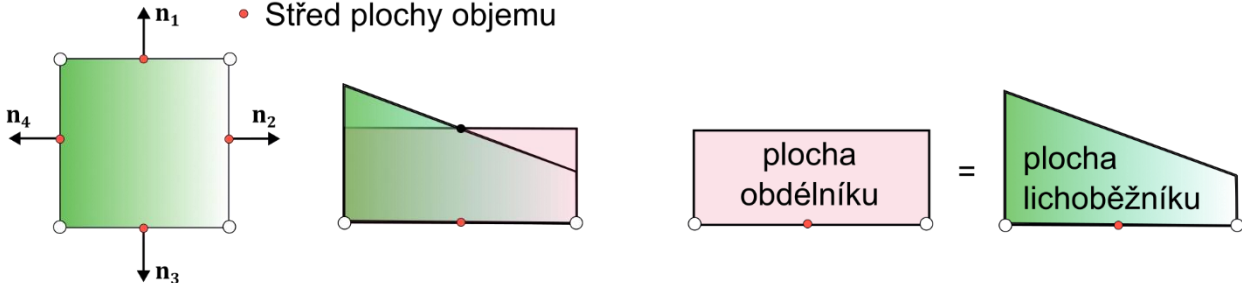
- Některé SW umožňují pracovat pouze s 3D geometrií.
- 1D a 2D problémy jsou pak ošetřeny speciálními okrajovými podmínkami (OpenFOAM).



Průběh proměnné napříč objemem a plochou

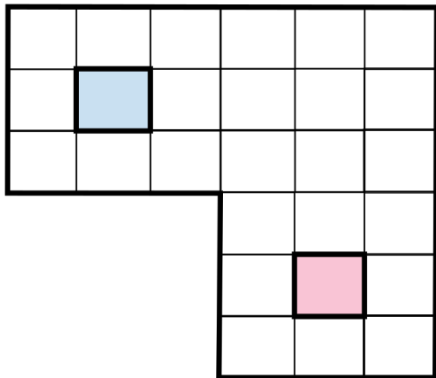
- Proměnné (p , T , U , ...) mají napříč objemem/buňkou a hraniční plochou objemu **lineární** průběh (MKO 2. řádu).
- Hodnoty proměnných (p , T , U , ...) jsou počítány a uloženy ve středech objemů (P , N , ...).
- Hodnoty na hranicích objemů (ve středech ploch) jsou určeny na základě hodnot ve středech sousedících objemů (interpolační schémata).
- Každý kontrolní objem má “ M ” sousedních kontrolních objemů (buněk), tj. “ M ” ploch.

- Uzel objemu
- Střed plochy objemu

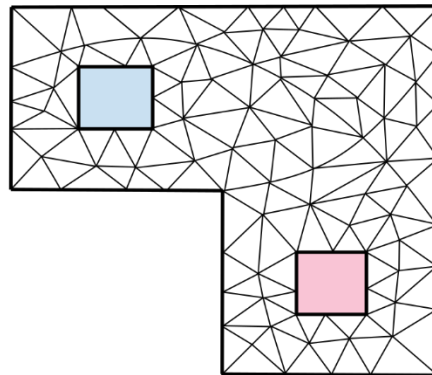


Topologie sítě a typy buněk

Čtyřúhelníková síť (2D Quadrilaterals)



Trojúhelníková síť (2D triangles)

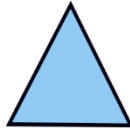


Používané typy elementů pro CFD

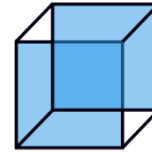
- **Šestistěny, čtyřstěny**, mnohostěny (polyhedry), klínové, pyramidové elementy, ...



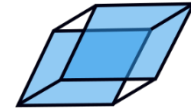
čtýřúhelník



trojúhelník



šestistěn
(hranol)

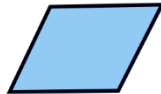


šestistěn
(zkosený)

2D

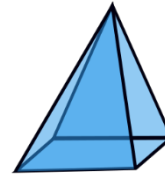


lichoběžník

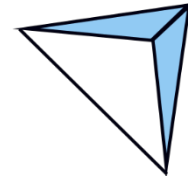


kosodélník

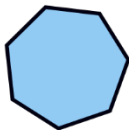
3D



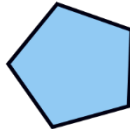
pětistěn
(pyramida)



čtyřstěn



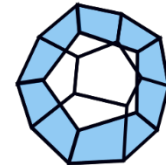
Polygon
(heptagon)



Polygon
(pentagon)



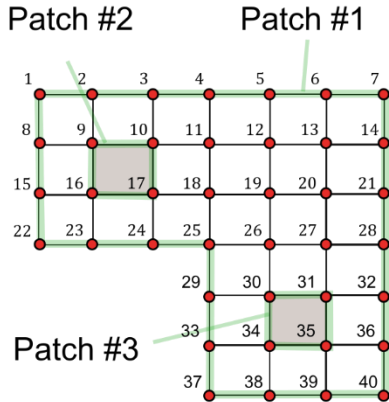
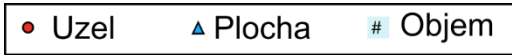
pětistěn
(hranol)



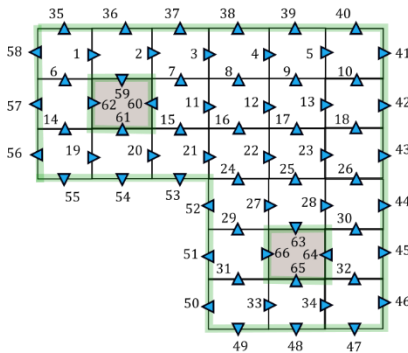
mnohostěn
(polyhedron)

Uspořádání a konektivita sítě

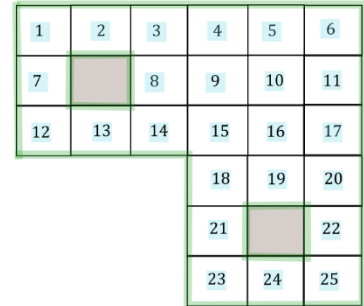
- Všechny uzly, plochy a objemy sítě musí být uloženy dle určité metodiky (systematicky).



Celkem uzlů = 40



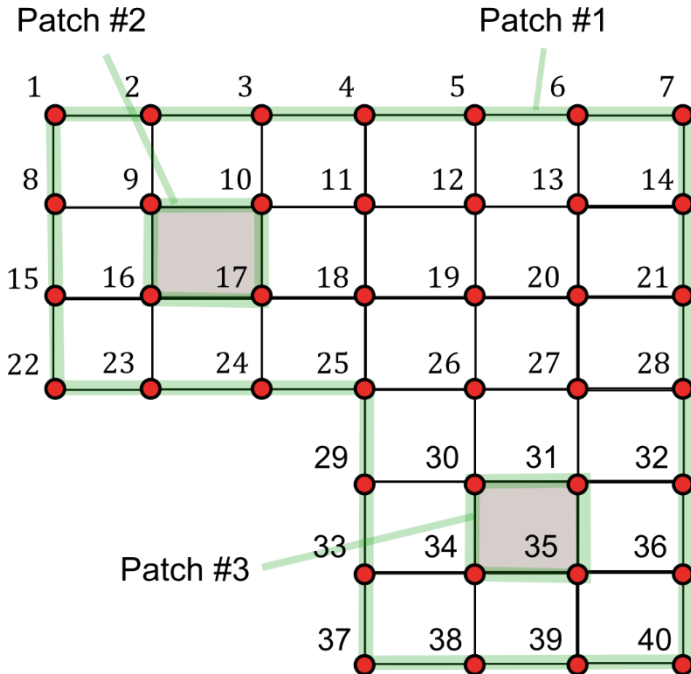
Celkem ploch = 66



Celkem objemů = 25

Uspořádání sítě – uzly

- Označení jednotlivých uzlů vzhledem k celé oblasti = **globální značení**.



Pole všech 40 uzlů

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

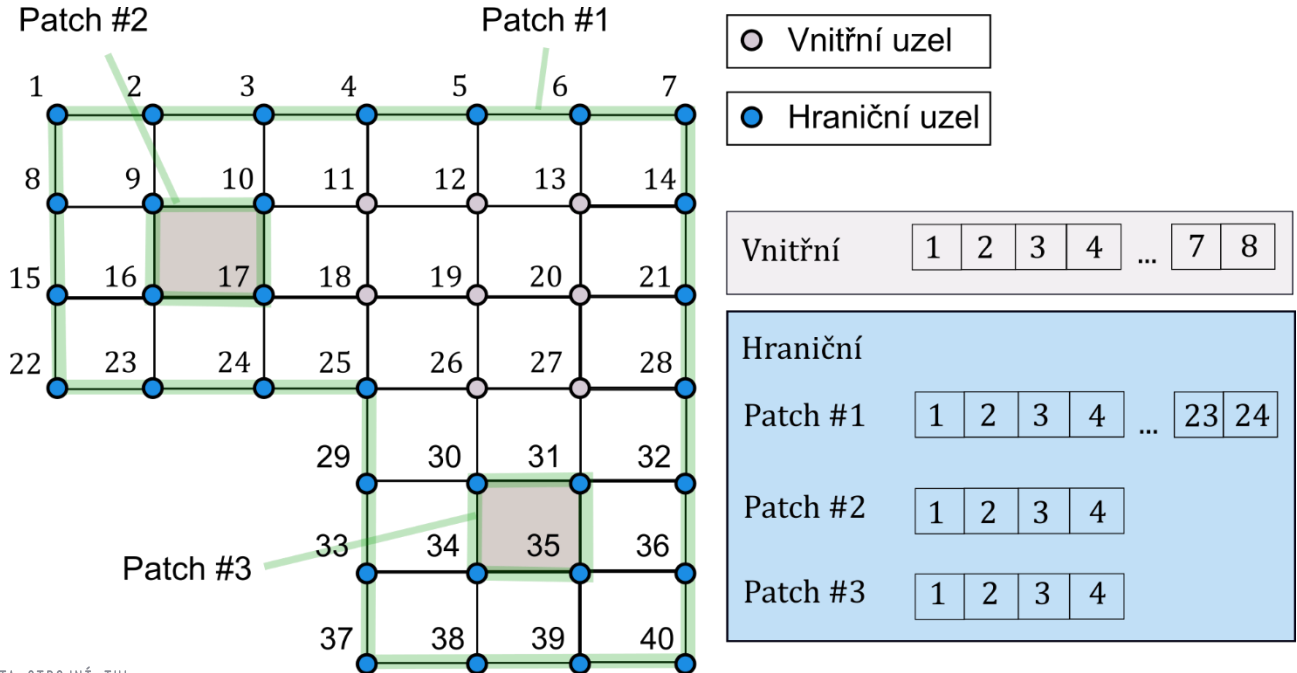
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

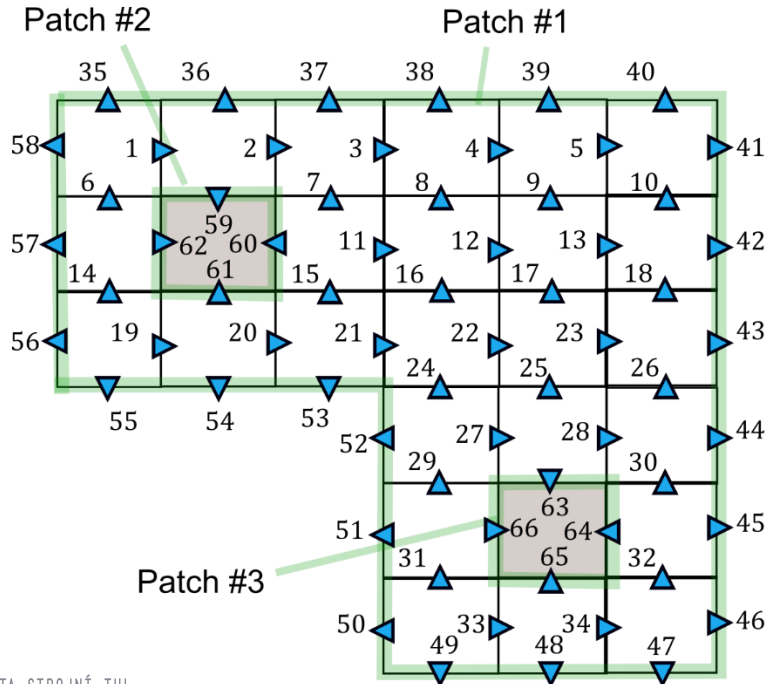
Uspořádání sítě – uzly (2)

- Označení jednotlivých uzlů vzhledem k příslušné okrajové podmínce = **lokální značení**.



Uspořádání sítě – plochy

- Označení jednotlivých ploch vzhledem k celé oblasti = **globální značení**.



▲ Plocha

Pole všech 66 ploch

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

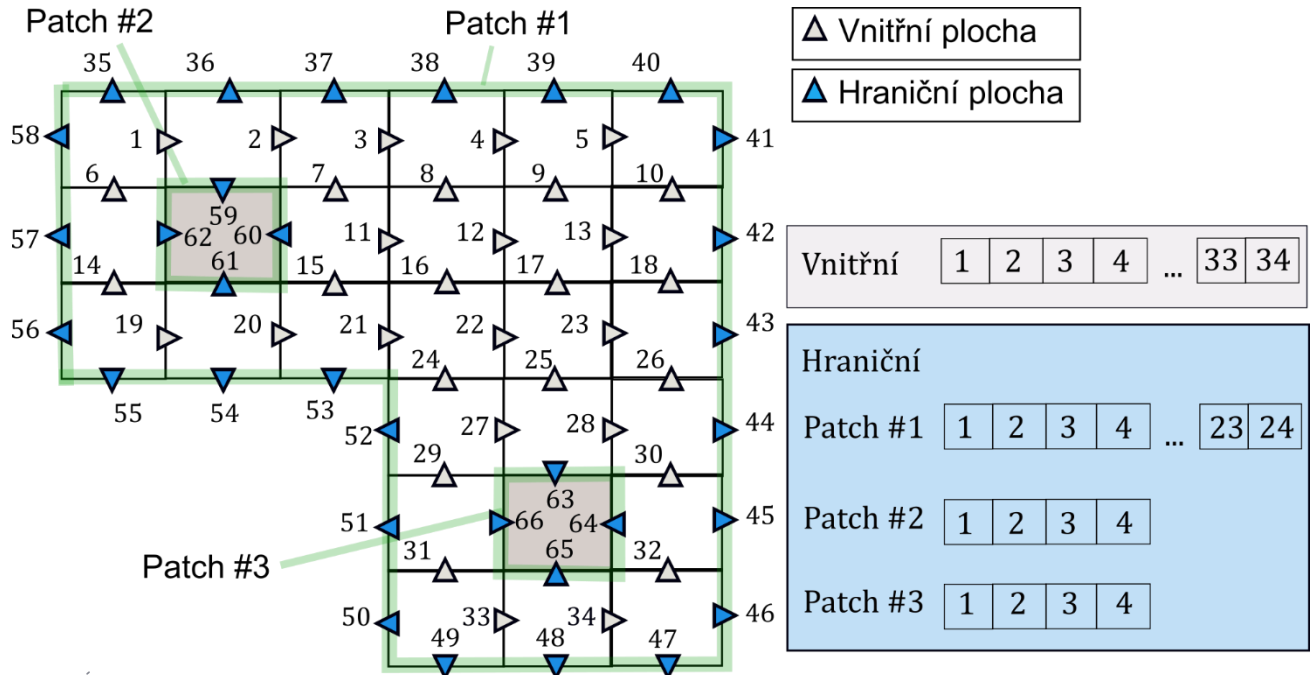
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

61	62	63	64	65	66
----	----	----	----	----	----

Uspořádání sítě – plochy (2)

- Označení jednotlivých ploch vzhledem k příslušné okrajové podmínce = **lokální značení**.

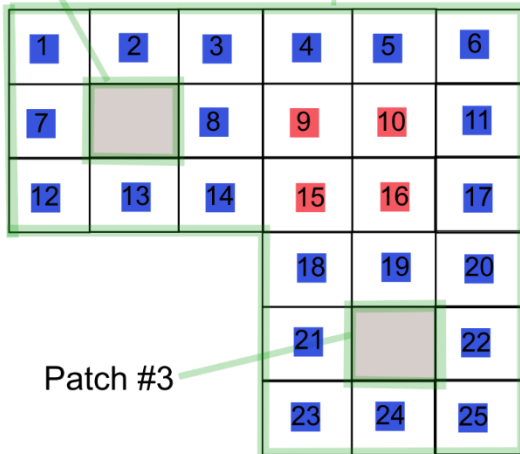


Uspořádání sítě – objemy

- Značení objemů vzhledem k jednotlivým okrajovým podmínkám, ale i obecněji na vnitřní a hraniční (okrajové podmínky), pro které objem nemusí mít sousední objemy na všech stranách.
- Většinou se však používá **globální** značení.

Patch #2

Patch #1



Vnitřní objem

Hraniční objem

Pole všech 25 objemů

Vnitřní

9	10	15	16
---	----	----	----

Okrajové (hraniční)

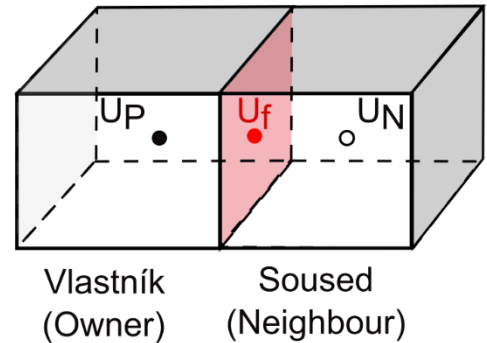
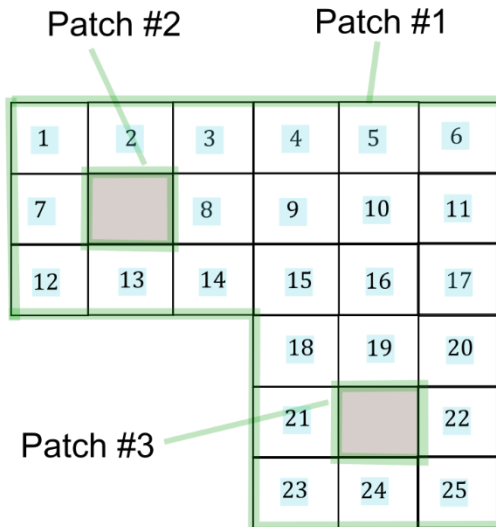
1	2	3	...	24	25
---	---	---	-----	----	----

Konektivita sítě – objemy

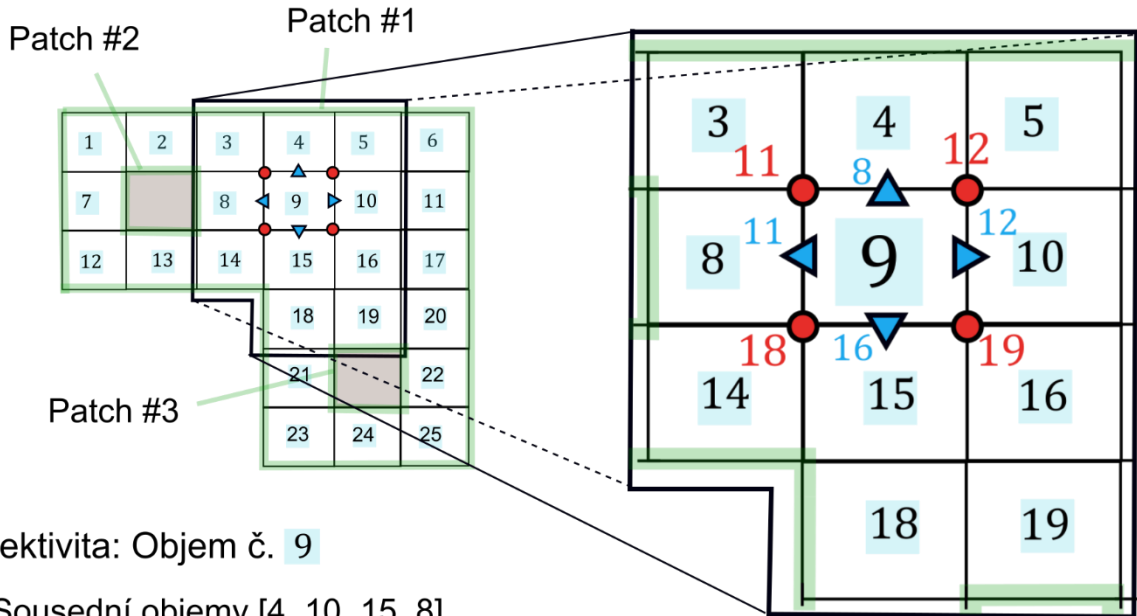
- Konektivita objemů (buněk) je nutná pro převod lokální formulace na globální formulaci (matice soustavy), která se používá pro konečné řešení problému.
- **Každý objem** („vlastník“) musí být **formulován ve smyslu jeho sousedních objemů, ohraničujících ploch a definujících uzlů.**

Objem

Celkem
objemů
= 25



Konektivita sítě – objemy (2)



Konektivita: Objem č. 9

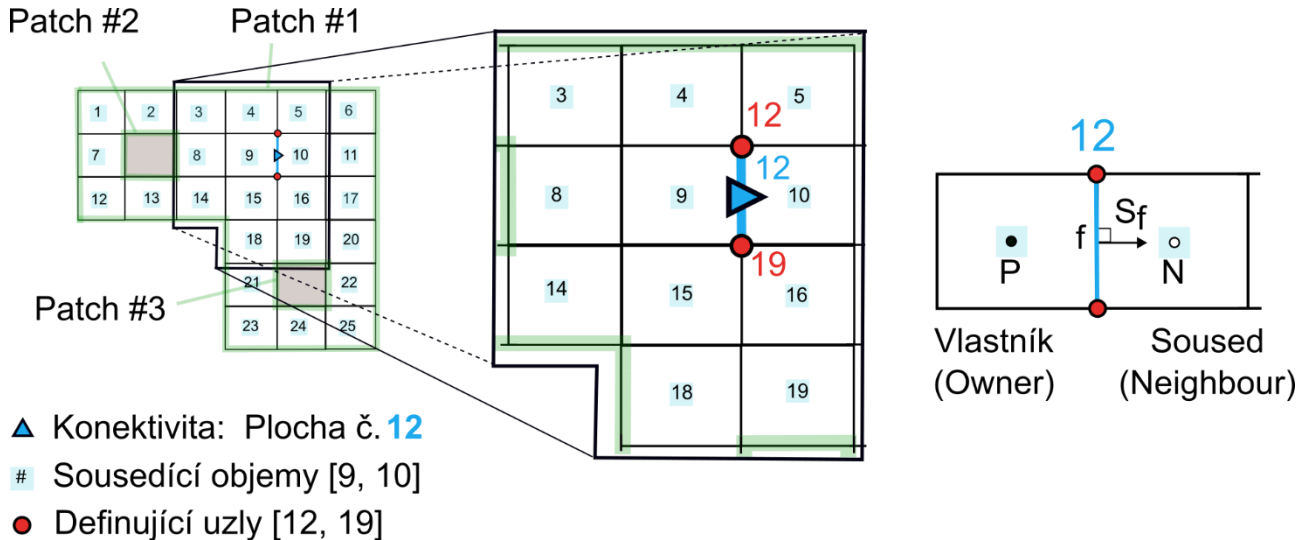
Sousední objemy [4, 10, 15, 8]

▲ Ohraničující plochy [8, 12, 16, 11]

● Definující uzly [12, 19, 18, 11]

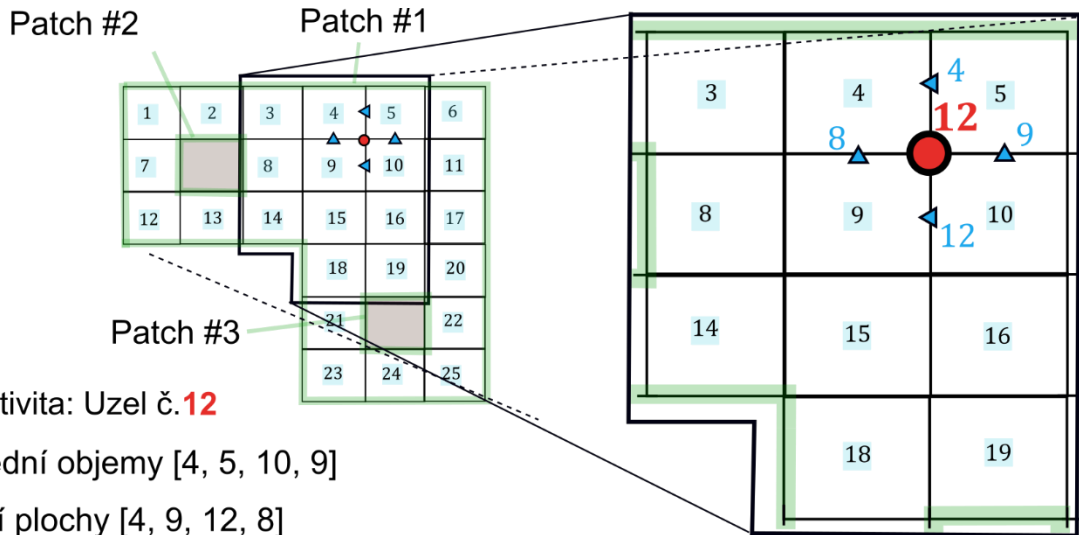
Konektivita sítě – plochy

- Využití především pro určení **toků bilancovaných veličin na hranicích objemů**.
- Každou plochy obvykle sdílí pouze 2 objemy, tj. na každé straně plochy je 1 objem.
- Existují výjimky, kdy 2 objemy sdílí více než 1 plochu.



Konektivita sítě – uzly

- Využívá se především pro vizualizaci a interpretaci dat (**post-processing**) a v některých případech také pro **výpočet gradientů** (Green-Gauss Node Based).
- Ve 2D pro čtyřúhelníkové objemy platí, že daný uzel je sdílen 4 objemy a 4 plochami, ve 3D a pro obecný typ elementu toto neplatí.

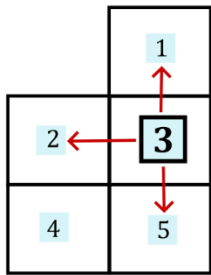


Převod lokální formulace na globální

$$a_P \phi_P + \sum_{nb=1}^N a_{nb} \phi_{nb} = b_P$$

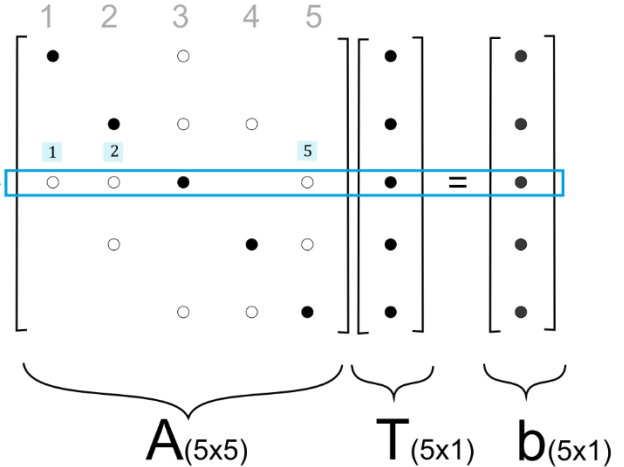
Lokální formulace: $a_P T_P + a_{nb1} T_1 + a_{nb2} T_2 + a_{nb3} T_3 = b_P$

Globální formulace: $a_{33} T_3 + a_{31} T_1 + a_{32} T_2 + a_{35} T_5 = b_3$



Objem č. 3

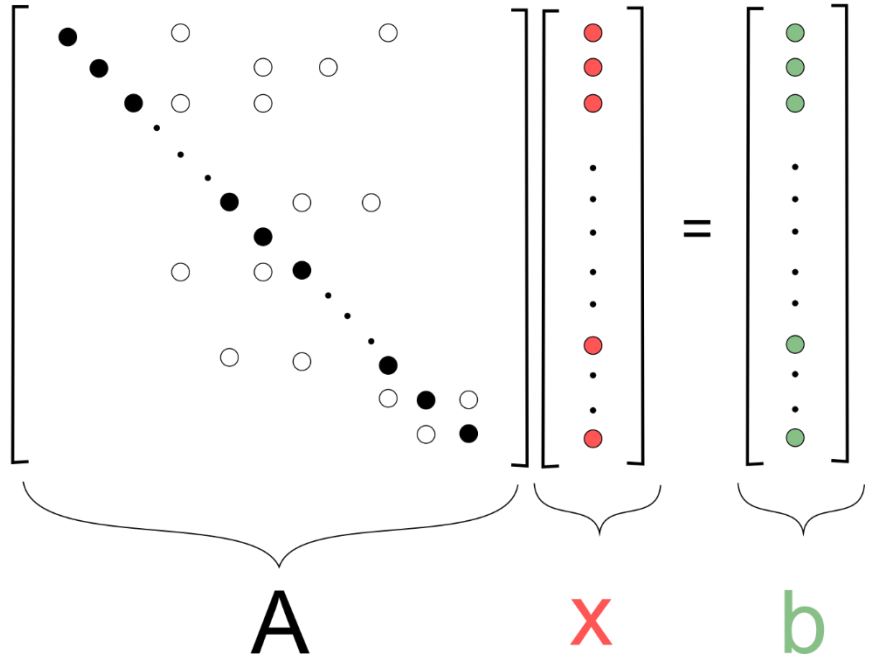
Sousední objemy
[1 2 5]



Maticový zápis soustavy rovnic

$$Ax = b$$

- Diagonální koeficient
- Mimodiagonální koeficient
- Neznámá veličina
- Zdrojový člen



Diskretizace rovnic

- Převod soustavy PDR na soustavu algebraických rovnic.
- **1 objem = 1 algebraická rovnice pro každou neznámou veličinu (p, T, u, v, w, ...).**
- Algebraické rovnice jsou sestaveny do maticového zápisu.

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + Q$$



$$a_P\phi_P + \sum_{nb=1}^N a_{nb}\phi_{nb} = b_P$$



$$A\phi = b$$

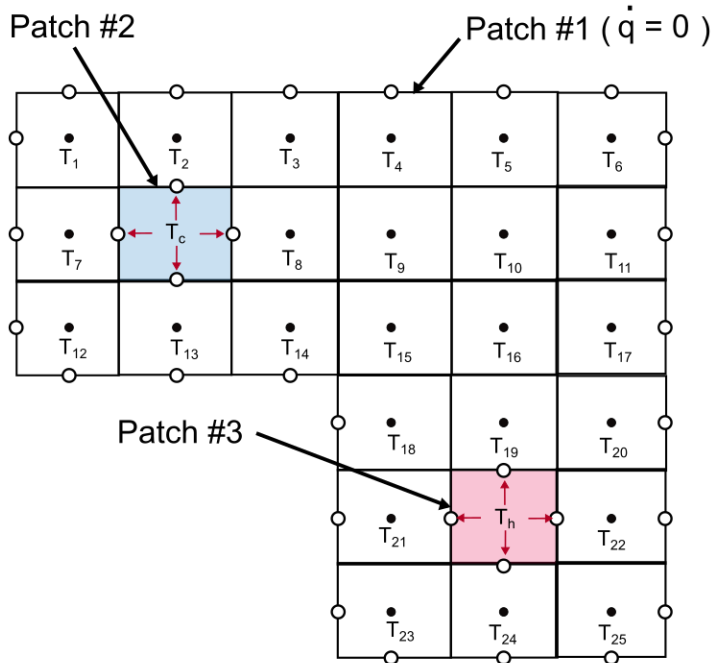
Diskretizace rovnic – příklad

$$\mathbf{AT} = \mathbf{b} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (2)$$

- Neznámou je v tomto případě teplota \mathbf{T} uložena ve středu každého objemu.
- Okrajové podmínky pro \mathbf{T} musí být specifikovány a jsou obsaženy ve vektoru \mathbf{b} .
- Výsledkem je skalární pole teploty.
- Obecně musí být odvozeno pole pro každou z řešených fyzikálních veličin.

Diskretizace rovnic – příklad (2)



- Hraniční objem (Boundary)
- Vnitřní objem (Interior)

$$a_P \phi_P + \sum_{nb=1}^N a_{nb} \phi_{nb} = b_P$$

$$-\nabla \cdot (k \nabla T) = \dot{q}$$

- **1D, stacionární energetická rovnice s konstantním zdrojem tepla bez uvažování proudění, tj. $v = 0$ m/s (rovnice vedení tepla v tuhých látkách).**

Diskretizace rovnic – příklad (3)

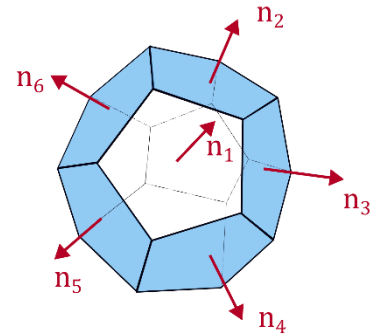
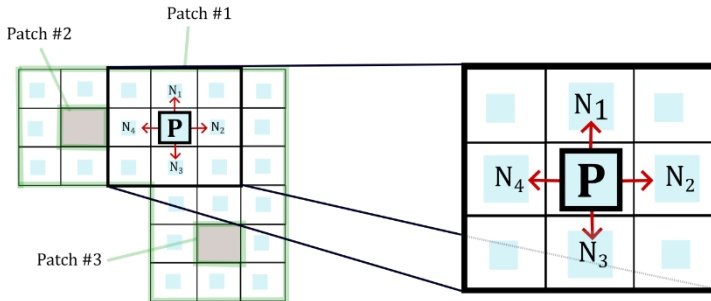
$$-\nabla \cdot (k\nabla T) = \dot{q} \quad (3)$$

$$-\int_V \nabla \cdot (k\nabla T) dV = \int_V \dot{q} dV \quad (4)$$

$$-\int_A (k\nabla T) \cdot d\mathbf{A} = \dot{q}_P V_P \quad (5)$$

- Tato rovnice bilancuje energii pro objem P (lokální formulace).

$$-\sum_{fi=1}^{nf} (k\nabla T)_{fi} \cdot \mathbf{A}_{fi} = \dot{q}_P V_P \quad (6)$$



Diskretizace rovnic – příklad (4)

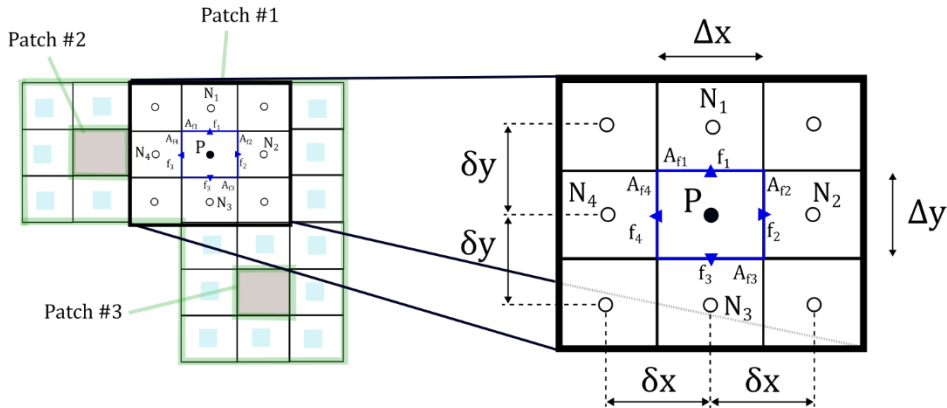
$$-[(k\nabla T)_{f_1} \cdot \mathbf{A}_{f_1} + (k\nabla T)_{f_2} \cdot \mathbf{A}_{f_2} + (k\nabla T)_{f_3} \cdot \mathbf{A}_{f_3} + (k\nabla T)_{f_4} \cdot \mathbf{A}_{f_4}] = \dot{q}_P V_P \quad (7)$$

- Například pro plochu f_2 můžeme psát:

$$\mathbf{A}_{f_2} = \Delta y_{f_2} \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} \quad (8)$$

$$\delta x_{f_2} = x_{N_2} - x_P \quad (9)$$

$$\nabla T_{f_2} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{f_2} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{f_2} \mathbf{j} \quad (10)$$

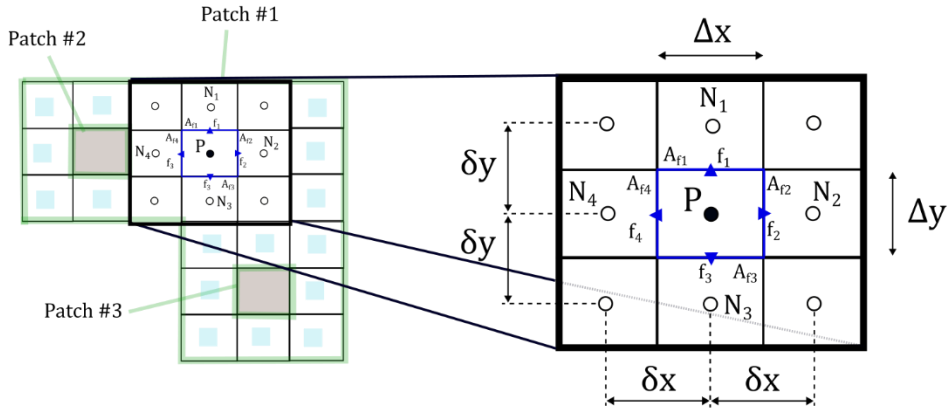


Diskretizace rovnic – příklad (5)

- Po dosazení dostaneme:

$$\nabla T_{f_2} \cdot \mathbf{A}_{f_2} = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} \right)_{f_2} \cdot (\Delta y_{f_2} \mathbf{i} + 0 \mathbf{j}) = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{f_2} \Delta y_{f_2} \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{f_2} = \frac{T_{N_2} - T_P}{\delta x_{f_2}} = \frac{T_{N_2} - T_P}{x_{N_2} - x_P} \quad (12)$$

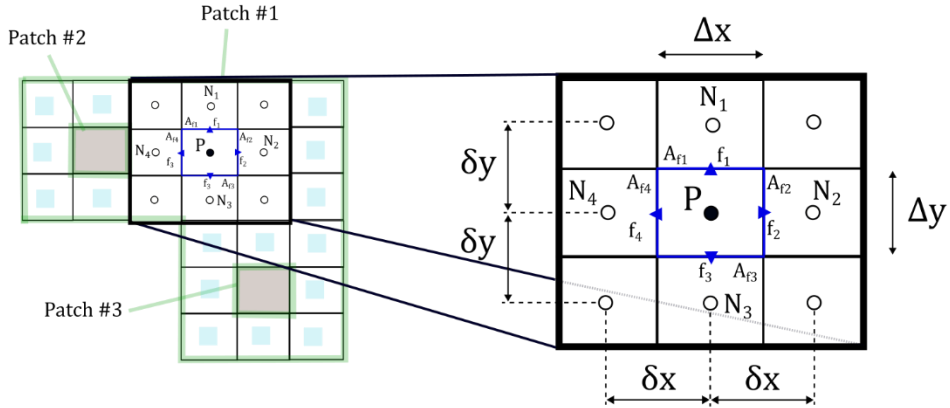


Diskretizace rovnic – příklad (6)

$$\nabla T_{f2} \cdot \mathbf{A}_{f2} = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{f2} \Delta y_{f2} = \frac{T_{N2} - T_P}{\delta x_{f2}} \Delta y_{f2} \quad (13)$$

$$-(k \nabla T)_{f2} \cdot \mathbf{A}_{f2} = a_{N2} (T_{N2} - T_P) \quad (14)$$

$$a_{N2} = -k \frac{\Delta y_{f2}}{\delta x_{f2}} \quad (15)$$



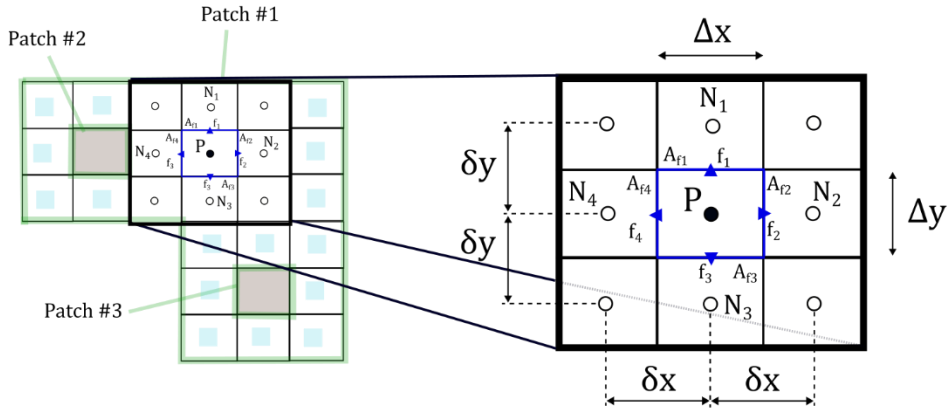
Diskretizace rovnic – příklad (7)

- Analogicky odvodíme koeficienty také pro zbývající 3 sousední objemy:

$$a_{N1} = -k \frac{\Delta x_{f1}}{\delta y_{f1}} \quad (16)$$

$$a_{N3} = -k \frac{\Delta x_{f3}}{\delta y_{f3}} \quad (17)$$

$$a_{N4} = -k \frac{\Delta y_{f4}}{\delta x_{f4}} \quad (18)$$



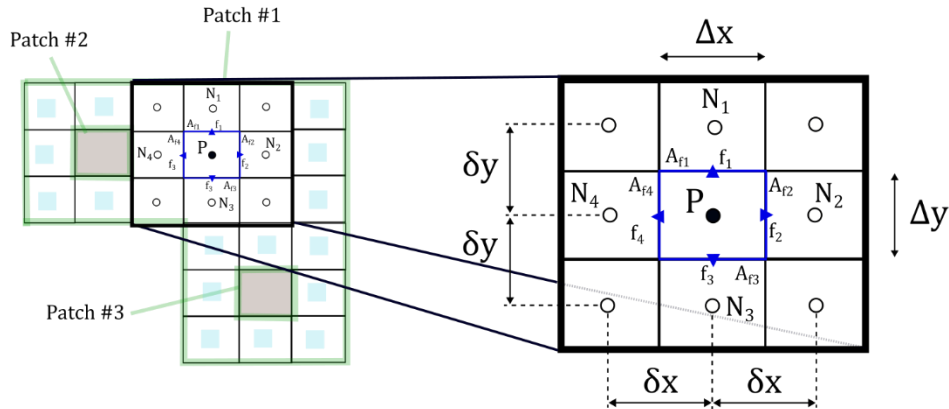
Diskretizace rovnic – příklad (8)

- Dosazením odvozených koeficientů do (7) dostaneme:

$$-[(k\nabla T)_{f_1} \cdot \mathbf{A}_{f_1} + (k\nabla T)_{f_2} \cdot \mathbf{A}_{f_2} + (k\nabla T)_{f_3} \cdot \mathbf{A}_{f_3} + (k\nabla T)_{f_4} \cdot \mathbf{A}_{f_4}] = \dot{q}_P V_P \quad (19)$$

$$-\sum_{fi=1}^{nf} (k\nabla T)_{fi} \cdot \mathbf{A}_{fi} = \sum_{i=1}^{NB} a_{Ni} (T_{Ni} - T_P) = \dot{q}_P V_P \quad (20)$$

$$-(a_{N_1} + a_{N_2} + a_{N_3} + a_{N_4})T_P + a_{N_1}T_{N_1} + a_{N_2}T_{N_2} + a_{N_3}T_{N_3} + a_{N_4}T_{N_4} = \dot{q}_P V_P \quad (21)$$



Diskretizace rovnic – příklad (9)

- V uceleném tvaru lze tedy napsat:

$$a_P T_P + \sum_{i=1}^{NB} a_{Ni} T_{Ni} = b_P \quad (22)$$

$$a_P = -\sum_{i=1}^{NB} a_{Ni} = -(a_{N1} + a_{N2} + a_{N3} + a_{N4}) \quad (23)$$

$$b_P = \dot{q}_P V_P \quad (24)$$

- Rovnice podobné vztahu (22) mohou být odvozeny pro všechny konečné objemy sítě, což vede na soustavu algebraických rovnic. Ta může být řešena běžně dostupnými matematickými metodami.
- Obecně můžou být odvozeny podobné rovnice také pro ostatní veličiny (p , u , v , w , k , ...).

Diskretizace rovnic – příklad (10)

- Uvedená rovnice je odvozena v lokální formulaci.

$$-(a_{N1} + a_{N2} + a_{N3} + a_{N4})T_P + a_{N1}T_{N1} + a_{N2}T_{N2} + a_{N3}T_{N3} + a_{N4}T_{N4} = \dot{q}_P V_P \quad (25)$$

- Pro sestavení maticového tvaru soustavy potřebujeme každou rovnici v lokální formulaci převést na globální formulaci, tedy pro konečný objem č. 9 dostáváme:

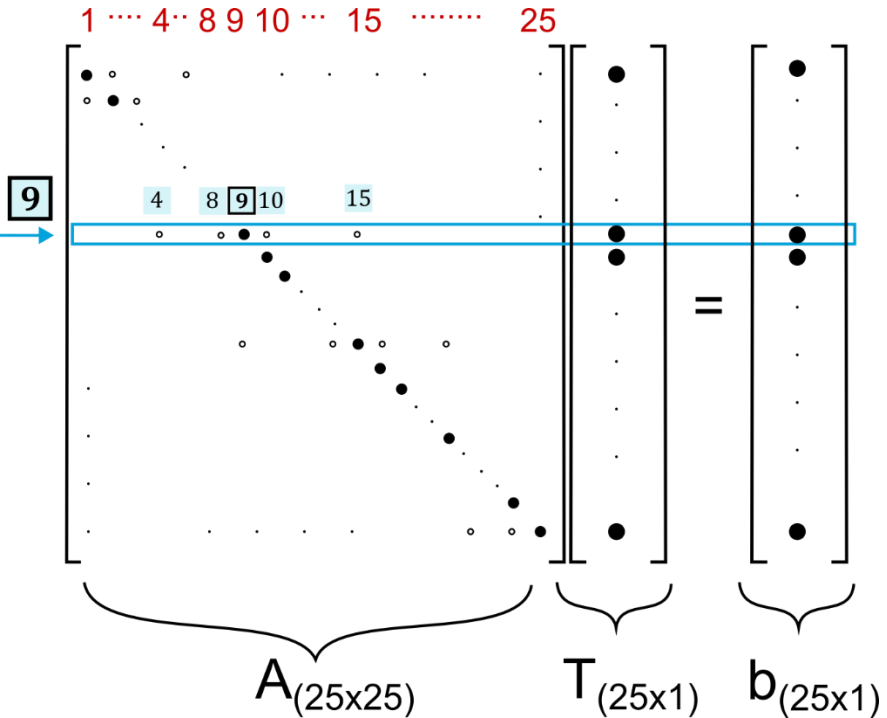
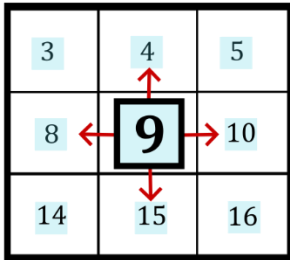
$$a_9 T_9 + a_{N4} T_{N4} + a_{N10} T_{N10} + a_{N15} T_{N15} + a_{N8} T_{N8} = \dot{q}_9 V_9 \quad (26)$$

$$\mathbf{AT} = \mathbf{b} \quad (27)$$

Diskretizace rovnic – příklad (11)

$$a_9 T_9 + a_{N4} T_{N4} + a_{N10} T_{N10} + a_{N15} T_{N15} + a_{N8} T_{N8} = \dot{q}_9 V_9 \quad (28)$$

Objem č. 9
 ↓
 Sousední objemy
 [4 10 15 8]



Řešení diskretizovaných rovnic

- Diskretizace převádí PDR na soustavu disktrétních algebraických rovnic.
- Pro získání neznámých veličin (T, p, u, v, w, \dots), je tyto rovnice nezbytné řešit.
- Techniky řešení systému rovnic jsou nezávislé na použité metodě diskretizace.
- Metody řešení systémů lineárních algebraických rovnic se obecně dělí na:
 - **Přímé metody** (Gaussova eliminace, LU rozklad, ...)
 - **Iterativní metody** (Jacobi, Gauss-Seidel, Metoda sdružených gradientů, ...)

Přímé metody

- Přímé metody využívají poměrně složitého algoritmu při řešení v porovnání s iteračními metodami.
- Nicméně tento algoritmus je většinou aplikován pouze jednou.
- Jako příklad můžeme uvažovat následující rovnici:

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (29)$$

- Řešení je zaručeno, pokud lze vypočítat \mathbf{A}^{-1} (jakýmkoliv způsobem).
- Pro reálné případy je velmi nepraktické počítat inverzní matici statisíce až miliony objemů.

Přímé metody (2)

- Stávají se výpočetně více náročné jak roste počet výpočetních objemů.
- Vyžadují velké nároky na paměť PC.
- V jednoduchých případech je matice **A** řídká a pro strukturované sítě rovněž pásová.
- Ve speciálních případech je matice **A** navíc symetrická.
- V těchto případech se s výhodou využívají techniky pro řešení takto specifických typů matic, což v mnoha případech urychluje řešení soustavy.

Iterativní metody

- Využívají tzv. princip „**odhad-korekce**“, kdy dochází k postupnému zpřesňování výsledku opakovaným řešením rovnic.
- Například metody Jacobiho a Gauss-Seidelova.
- Postup řešení:
 - 1) Počáteční odhad diskrétních hodnot **T** ve všech objemech sítě.
 - 2) Procházení všemi objemy a aktualizace hodnot **T** s využitím vztahu:

$$T_P = \frac{-\sum_{i=1}^{NB} a_{Ni}T_{Ni} + b_P}{a_P} \quad (30)$$

- 3) Průchod všemi objemy sítě tvoří 1 kompletní iteraci.
- 4) Kontrola dosažení konvergenčního kritéria (Ano–konec, Ne–návrat do bodu 1)).

Iterativní metody (2)

- Pro libovolně velké koeficienty \mathbf{a}_p a \mathbf{a}_{Ni} není zaručena konvergence ke správnému řešení.
- **Scarboroughovo kritérium** musí být splněno.

$$\frac{-\sum_{i=1}^{NB} a_{Ni}}{a_p} \begin{cases} \leq 1 & \text{pro všechny členy} \\ < 1 & \text{pro alespoň 1 člen} \end{cases} \quad (31)$$

- Všechny matice, které splňují toto kritérium jsou tzv. **diagonálně dominantní**.
- Gauss-Seidelova metoda může být použita s velmi nízkými nároky na paměť, koeficienty matice jsou často počítány „za běhu“, protože v daný okamžik není pro výpočet celá matice potřeba.
- G-S metoda je zřídka používána v základní podobě pro rozsáhlé systémy rovnic z důvodu pomalé konvergence. V těchto případech se využívá v kombinaci s vícesíťovými metodami, tzv. multigrid methods.

Shrnutí přednášky

- Diskretizace geometrie vs diskretizace rovnic
- Topologie a konektivita výpočetní sítě (způsob uložení uzlů, ploch a objemů)
- Řešení diskretizovaných (algebraických) rovnic



Děkuji za pozornost!