



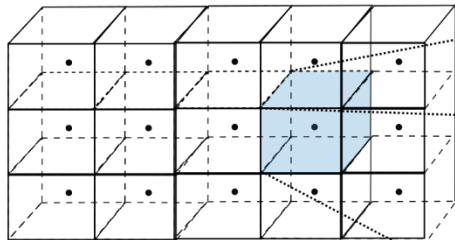
Metoda konečných objemů, diskretizace jednotlivých členů v N-S rovnicích

Obsah přednášky

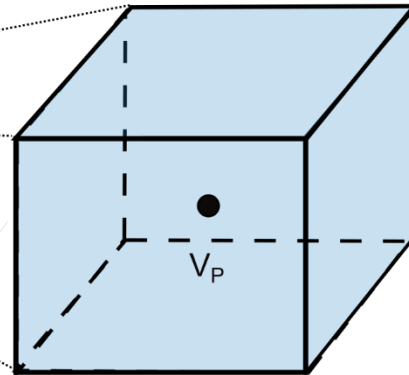
- Princip metody konečných objemů (MKO) – opakování
- Způsoby diskretizace jednotlivých členů v N-S rovnicích
- Neortogonalita výpočetní sítě – způsoby řešení

Metoda konečných objemů

- Princip metody konečných objemů spočívá v rozdělení výpočetní oblasti na menší podoblasti, tzv. kontrolní objemy (KO).
- Integrace základních rovnic (pro popis proudění nebo přenosu tepla) přes daný kontrolní objem zajistí převedení soustavy PDR na soustavu algebraických rovnic, kde jsou hodnoty neznámých (p , u , v , w , T , ...) řešeny ve středech kontrolních objemů.



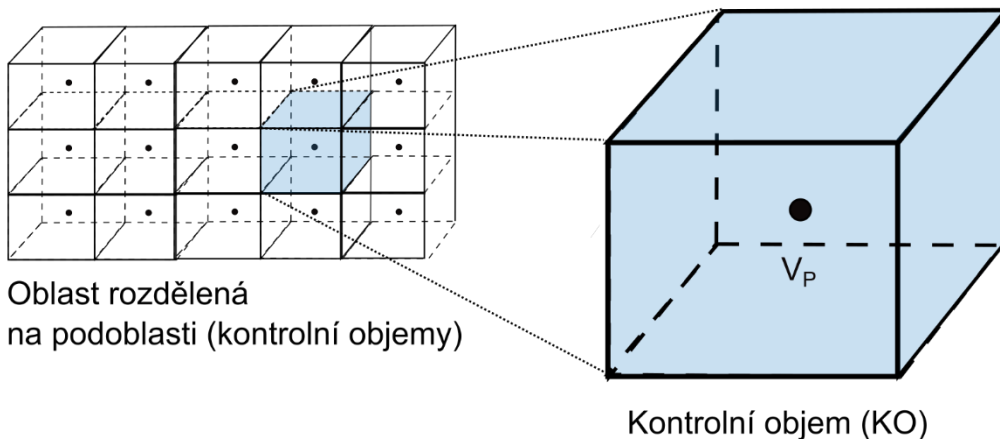
Oblast rozdělená
na podoblasti (kontrolní objemy)



Kontrolní objem (KO)

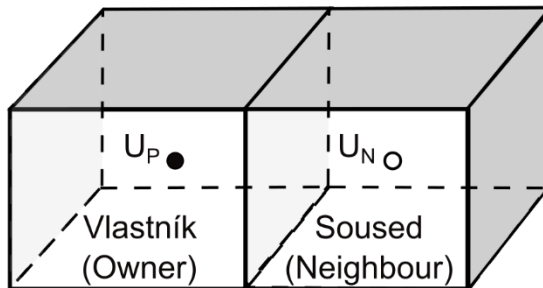
Metoda konečných objemů (2)

- Linearizace diskretizovaných rovnic a řešení soustavy těchto rovnic vede na aktualizaci hodnot neznámých veličin v každé iteraci.
- Velikost každého kontrolního objemu (V_p) je předem známa.



Metoda konečných objemů (3)

- Hodnoty neznámých (p , T , \mathbf{v} , ...) se mění lineárně podél objemu (MKO 2. řádu).
- Hodnoty neznámých (p , T , \mathbf{v} , ...) jsou obvykle uloženy ve středech objemů (P , N , ...).
- Každý kontrolní objem má "M" sousedních objemů, tj. "M" ohraničujících ploch.



Maticový zápis N-S rovnic

- N-S rovnice ve vektorovém tvaru:

$$\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial t} + \nabla \cdot \{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = -\nabla p + \nabla \cdot \{\boldsymbol{\tau}\} + [\rho\mathbf{g}] \quad (1)$$

- Člen vyjadřující tečné napětí vlivem viskozity pro Newtonovskou tekutinu:

$$\nabla \cdot \{\boldsymbol{\tau}\} = \nabla \cdot \left\{ \mu \{ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \right\} \quad (2)$$

- Pro algoritmus chceme mít N-S rovnice v maticové formě, např. pro složku \mathbf{x} :

$$\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{B} \quad (3)$$

- \mathbf{M} je matice koeficientů, \mathbf{B} je vektor pravé strany (zdroje, OP).

Maticový zápis N-S rovnic (2)

- **Stacionární, nestlačitelné, vazké proudění** je popsáno následovně:

$$\nabla \cdot \{\rho \mathbf{v}\mathbf{v}\} = -\nabla p + \nabla \cdot \left\{ \mu \{ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \} \right\} + [\rho \mathbf{g}] \quad (4)$$

- Každý z těchto členů lze integrovat samostatně a tím využít různé techniky pro převedení do algebraické podoby.

$$\underbrace{\int_V [\nabla \cdot \{\rho \mathbf{v}\mathbf{v}\}] dV}_{\text{Konvektivní člen}} = - \underbrace{\int_V [\nabla p] dV}_{\text{Plakový člen}} + \underbrace{\int_V \left[\nabla \cdot \left\{ \mu \{ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \} \right\} \right] dV}_{\text{Difúzní člen (vazké síly)}} + \underbrace{\int_V [\rho \mathbf{g}] dV}_{\text{Zdrojový člen (objemové síly)}} \quad (5)$$

- Pro nestlačitelné tekutiny je $\rho = konst.$:

$$\int_V [\nabla \cdot \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}] dV = -\frac{1}{\rho} \int_V [\nabla p] dV + \int_V \left[\nabla \cdot \left\{ \nu \{ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \} \right\} \right] dV + \int_V [\mathbf{g}] dV \quad (6)$$

Zdrojový člen

- Zdrojový člen může být:
 1. **Konstantní** ($g = konst.$)
 2. **Lineární** ($g = f(v)$)
 3. **Nelineární, členy vyšších řádů** (kvadratické, kubické, ...)
- Konstantní zdroje jsou jednodušší na řešení a v maticovém tvaru se projeví na pravé straně (vektor **B**).

$$\mathbf{Mu} = \mathbf{B} \quad (7)$$

- Lineární a nelineární zdrojové členy vyžadují odlišné ošetření a obecně dělají řešení složitější.

Zdrojový člen (2)

- Konstantní člen může být například gravitační zrychlení:

$$\int_V [\mathbf{g}]dV = \mathbf{g}V_P \quad (8)$$

- V_P je objem buňky P.
- Lineární člen $S\mathbf{v}$, kde S je skalár, může být vyjádřen následovně:

$$\int_V [S\mathbf{v}]dV = S_P \int_V \mathbf{v}dV = S_P \int_V [\mathbf{v}_P + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \cdot \{\nabla\mathbf{v}_P\}]dV \quad (9)$$

$$\int_V [S\mathbf{v}]dV = S_P \mathbf{v}_P \int_V dV + \underbrace{\{\nabla\mathbf{v}_P\} \cdot \int_V ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_P))dV}_{= \mathbf{0}} = S_P \mathbf{v}_P V_P \quad (10)$$

Zdrojový člen (3)

- Máme 2 možnosti, jak řešit lineární zdrojový člen.

$$\int_V [S\mathbf{v}]dV = S_P \mathbf{v}_P V_P \quad (11)$$

- Zaprvé můžeme tento celý člen přidat na pravou stranu rovnice (vektor \mathbf{B}) – **explicitní** řešení.
- Nebo můžeme přidat část $(-S_P V_P)$ k matici \mathbf{M} – **implicitní** řešení.
- Implicitní řešení zvyšuje diagonální dominanci matice \mathbf{M} , tedy i celého systému.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -S_1 V_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -S_2 V_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & -S_3 V_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -S_M V_M \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} S_1 u_1 V_1 \\ S_2 u_2 V_2 \\ S_3 u_3 V_3 \\ \vdots \\ S_M u_M V_M \end{pmatrix} \quad (13)$$

Zdrojový člen (4)

- Nelineární zdrojové členy používají **kombinované řešení** (implicitně-explicitní).

$$S_{\mathbf{v}}^2 \quad (14)$$

- Vztah (14) můžeme rozepsat jako:

$$(S_{\mathbf{v}}^{i-1})_{\mathbf{v}} \quad (15)$$

- Pak dostaneme:

$$\int_V [S_{\mathbf{v}}^2] dV = S_P \mathbf{v}_P^{i-1} \mathbf{v}_P V_P \quad (16)$$

- **Pro linearizaci** využíváme hodnot rychlosti z předešlé iterace $\mathbf{v}_P^{(i-1)}$.

Konvektivní a difúzní člen

- Oba tyto členy obsahují operátor nabra (∇ nebo $\nabla \cdot$).

$$\underbrace{\int_V [\nabla \cdot \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}]dV}_{\text{Konvektivní člen}} = -\frac{1}{\rho} \int_V [\nabla p]dV + \underbrace{\int_V [\nabla \cdot \{v\nabla\mathbf{v}\}]dV}_{\text{Difúzní člen}} + \int_V [g]dV \quad (17)$$

- Potřebujeme převést objemové integrály na plošné integrály.
- **Věta o divergenci** (Gauss-Ostrogradsky):

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}dS$$

(18)

Konvektivní člen

$$\underbrace{\int_V [\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v})] dV}_{\text{Konvekce}} = -\frac{1}{\rho} \int_V [\nabla p] dV + \underbrace{\int_V [\nabla \cdot (\mathbf{v}\nabla\mathbf{v})] dV}_{\text{Difúze}} + \int_V [\mathbf{g}] dV \quad (19)$$

- Aplikace věty o divergenci:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad \longrightarrow \quad \int_V \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) dV = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (20)$$

- Objemový tok plochou (\mathbf{F}) je:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (21)$$

- Rychlost vně závorek ve vztahu (20) je neznámou, kterou hledáme.

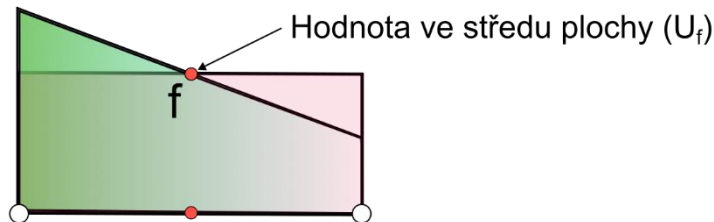
Konvektivní člen (2)

- Dále musíme převést integrál na sumu jednotlivých ploch.

$$\int_S \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \sum_{i=1}^M \int_{S_i} \mathbf{v}_i(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i) dS_i \quad (22)$$

- M je počet sousedních objemů.
- Průběh jakékoliv veličiny je podél plochy **lineární** (MKO 2. řádu).
- Tedy můžeme použít pro výpočet hodnotu veličiny uprostřed plochy (f).

$$\sum_{i=1}^M \int_{S_i} \mathbf{v}_i(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i) dS_i = \sum_{i=1}^M \mathbf{v}_{fi}(\mathbf{v}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi}) S_{fi} \quad (23)$$

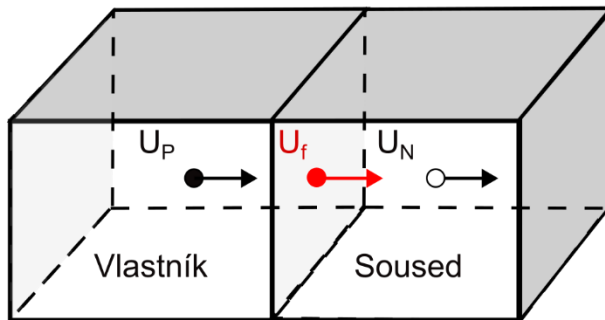


Konvektivní člen (3)

- MKO obvykle ukládá a počítá hodnoty neznámých veličiny ve středech objemů.

$$\sum_{i=1}^M \mathbf{v}_{fi} (\mathbf{v}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi}) S_i = \sum_{i=1}^M \mathbf{v}_{fi} F_{fi} \quad (24)$$

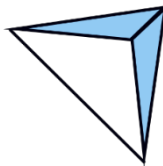
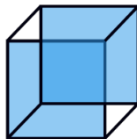
- Pro získání hodnot na hranicích objemů, tj. plochách, je nezbytné **interpolovat**.



Konvektivní člen (4)

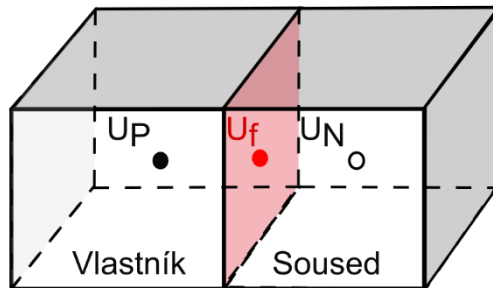
- Výsledkem je, že matice koeficientů \mathbf{M} obsahuje diagonální a mimo-diagonální prvky.
- Například ve 3D má šestistěnná buňka 1 diagonální člen a 6 mimo-diagonálních členů, čtyřstěnná buňka má 1 diagonální člen a 4 mimo-diagonální členy.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \cdots & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_{32} & M_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_{MM} \end{pmatrix} \quad (25)$$



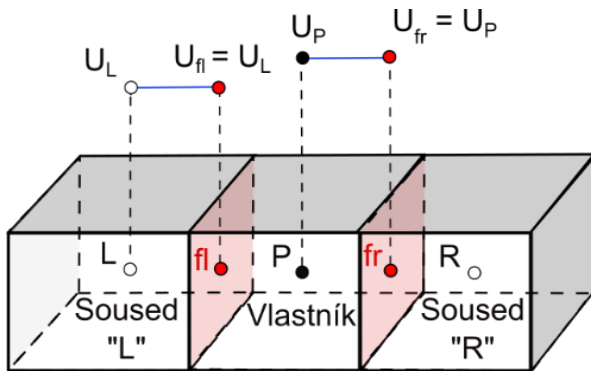
Diskretizační schémata konvektivních členů

- Pro získání hodnot na hranicích/plochách objemů existuje celá řada metod.
- Nejčastěji používaná schémata:
 1. **Protisměrné schéma 1. řádu** (1st Order Upwind)
 2. **Protisměrné schéma 2. řádu** (2nd Order Upwind)
 3. **Centrální schéma** (Central Differencing, lineární interpolace)
 4. **QUICK schéma** (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics)
- Uvedená schémata počítají hodnotu na hranici 2 objemů pomocí hodnoty ve středu aktuálního objemu (P) a hodnoty ve středu sousedního objemu (N).

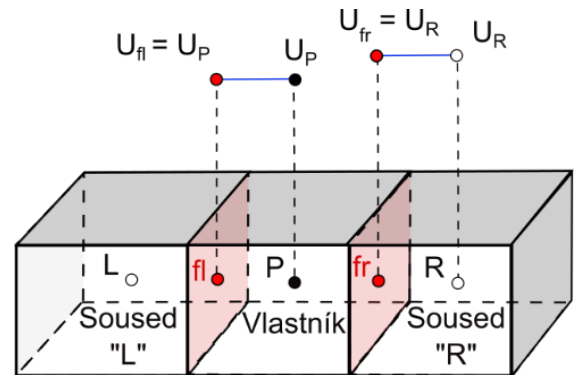


Protisměrné schéma 1. řádu (1st Order Upwind)

- Nejjednodušší diskretizační schéma, přesnost 1. řádu.
- Jednoduché na implementaci a stabilizuje výpočet.
- Silně difúzní, gradienty v proudovém poli jsou často rozmazané.
- Nejlepší schéma pro předběžné výpočty nebo výpočty se „špatnou“ sítí.



Směr proudu

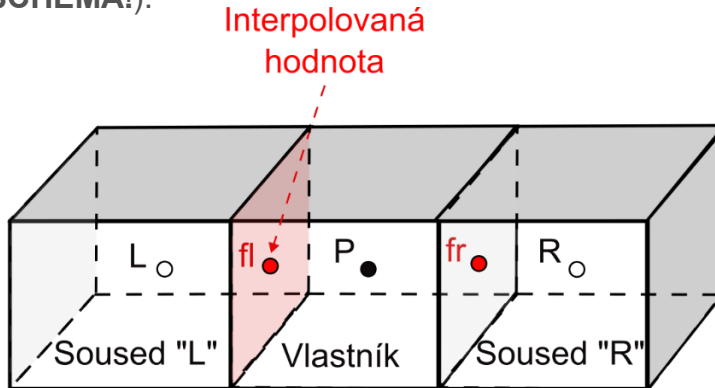


Směr proudu



Protisměrné schéma 1. řádu (1st Order Upwind) (2)

- Hodnota \mathbf{U} na hranici/ploše objemu (\mathbf{U}_f) je shodná s hodnotou ve středu objemu, který leží **PROTI PROUDU** (UPSTREAM) vzhledem k této ploše (**SMĚROVĚ ZÁVISLÉ SCHÉMA!**).



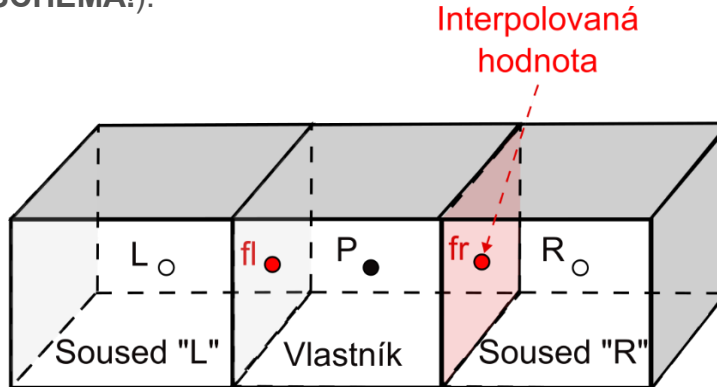
$$U_f = a_P U_P + a_L U_L + a_R U_R \quad (26)$$

ZLEVA DOPRAVA: $a_P = 0; \quad a_L = 1; \quad a_R = 0; \quad U_f = U_L \quad (27)$

ZPRAVA DOLEVA: $a_P = 1; \quad a_L = 0; \quad a_R = 0; \quad U_f = U_P \quad (28)$

Protisměrné schéma 1. řádu (1st Order Upwind) (3)

- Hodnota \mathbf{U} na hranici/ploše objemu (\mathbf{U}_f) je shodná s hodnotou ve středu objemu, který leží **PROTI PROUDU** (UPSTREAM) vzhledem k této ploše (**SMĚROVĚ ZÁVISLÉ SCHÉMA!**).



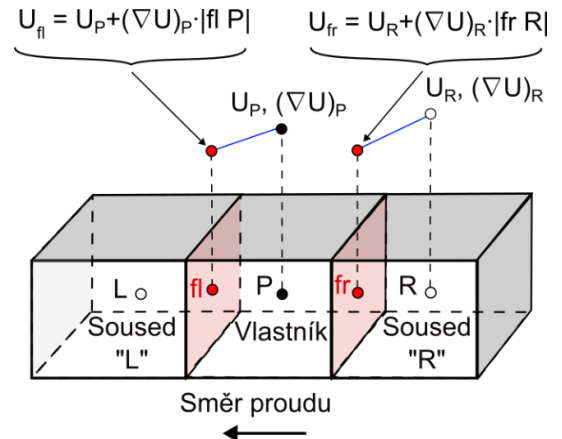
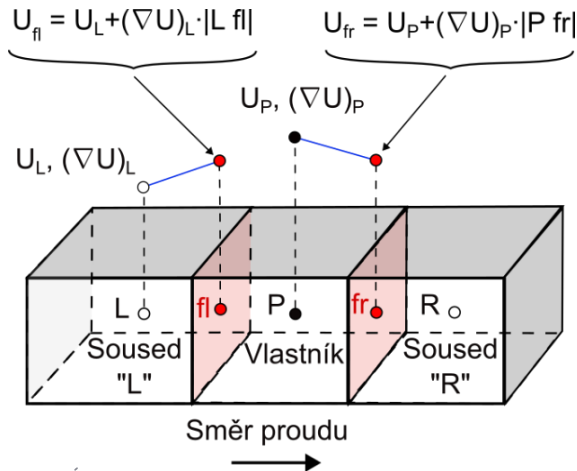
$$U_f = a_P U_P + a_L U_L + a_R U_R \quad (29)$$

ZLEVA DOPRAVA: $a_P = 1; a_L = 0; a_R = 0; U_f = U_P$ (30)

ZPRAVA DOLEVA: $a_P = 0; a_L = 0; a_R = 1; U_f = U_R$ (31)

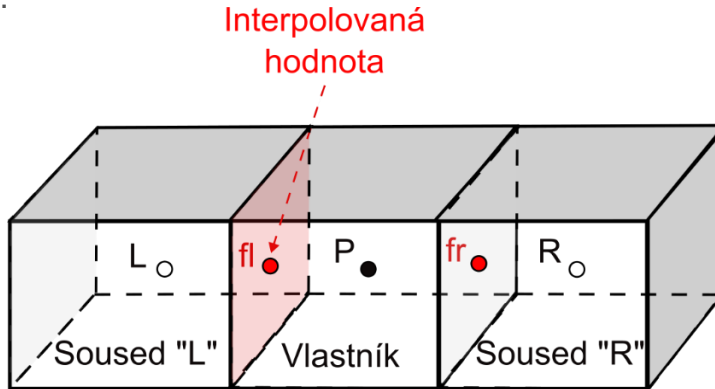
Protisměrné schéma 2. řádu (2nd Order Upwind)

- Přesnější než schéma 1. řádu (rovněž **SMĚROVĚ ZÁVISLÉ SCHÉMA!**).
- V oblastech s velkými gradienty veličin může dávat hodnoty, které jsou mimo rozsah hodnot ve středech okolních buněk (aplikace tzv. omezovačů – limiterů).
- Oblíbené schéma, používá se jako kompromis mezi přesností a stabilitou.



Protisměrné schéma 2. řádu (2nd Order Upwind) (2)

- Hodnota \mathbf{U} na hranici objemu (\mathbf{U}_f) závisí na hodnotě a gradientu ve středu objemu, který leží **PROTI PROUDU** ($\mathbf{U}_p, \nabla \mathbf{U}_p$) vzhledem k této ploše (**SMĚROVĚ ZÁVISLÉ SCHÉMA!**).



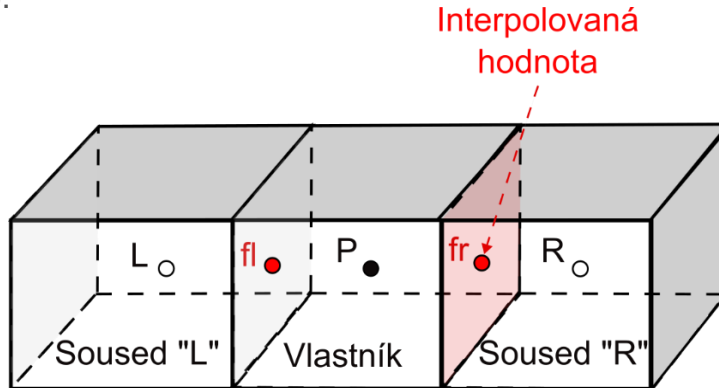
$$U_f = a_P U_P + a_L U_L + a_R U_R \quad (32)$$

$$\text{ZLEVA DOPRAVA: } a_P = 0; a_L = 1 + \frac{1}{U_L} (\nabla U)_L |L fl|; a_R = 0; U_f = U_L + (\nabla U)_L |L fl| \quad (33)$$

$$\text{ZPRAVA DOLEVA: } a_P = 1 + \frac{1}{U_P} (\nabla U)_P |fl P|; a_L = 0; a_R = 0; U_f = U_P + (\nabla U)_P |fl P| \quad (34)$$

Protisměrné schéma 2. řádu (2nd Order Upwind) (3)

- Hodnota \mathbf{U} na hranici objemu (\mathbf{U}_f) závisí na hodnotě a gradientu ve středu objemu, který leží **PROTI PROUDU** ($\mathbf{U}_P, \nabla \mathbf{U}_P$) vzhledem k této ploše (**SMĚROVĚ ZÁVISLÉ SCHÉMA!**).



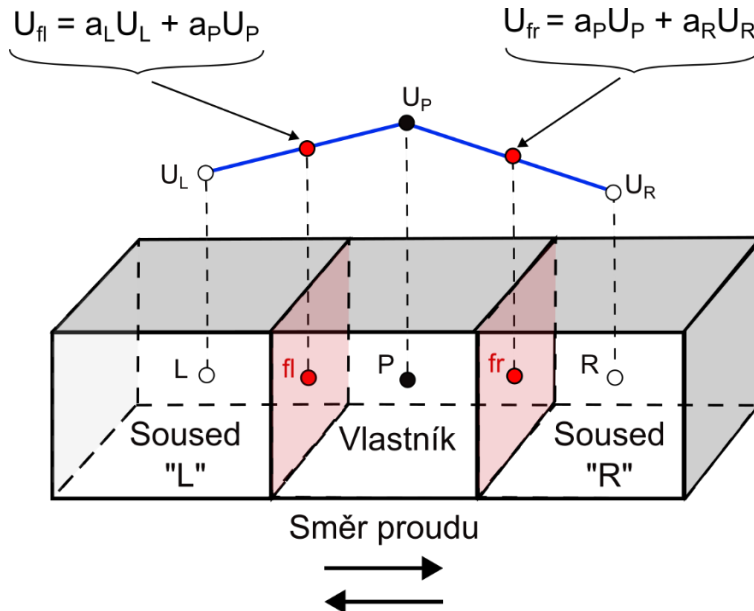
$$U_f = a_P U_P + a_L U_L + a_R U_R \quad (35)$$

$$\text{ZLEVA DOPRAVA: } a_P = 1 + \frac{1}{U_P} (\nabla U)_P |P \text{ fr}|; a_L = 0; a_R = 0; U_f = U_P + (\nabla U)_P |P \text{ fr}| \quad (36)$$

$$\text{ZPRAVA DOLEVA: } a_P = 0; a_L = 0; a_R = 1 + \frac{1}{U_R} (\nabla U)_R |fr R|; U_f = U_R + (\nabla U)_R |fr R| \quad (37)$$

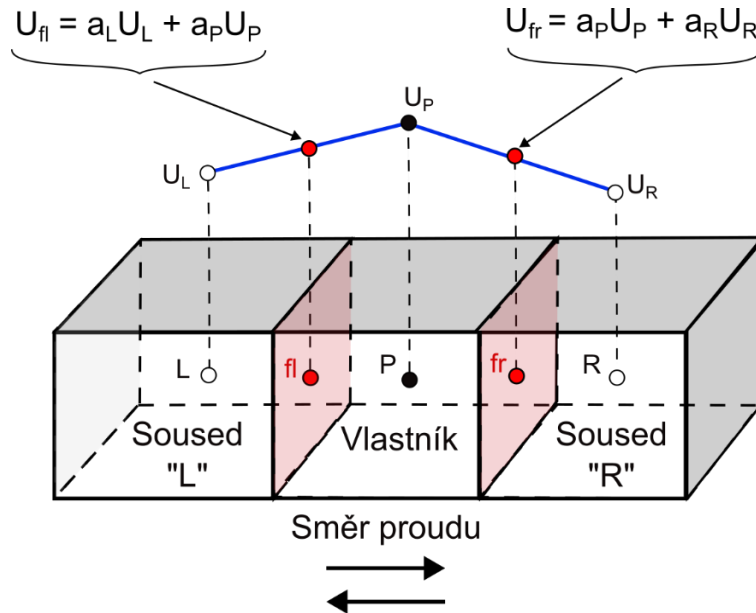
Centrální schéma (Central-Differencing)

- Přesnější než schéma 1. řádu, má přesnost 2. řádu.
- Hodnota \mathbf{U} na hranici/ploše objemu (\mathbf{U}_f) je získána **lineární interpolací** hodnot ve středech objemů, které leží na obou stranách plochy (**SMĚROVĚ NEZÁVISLÉ SCHÉMA**).



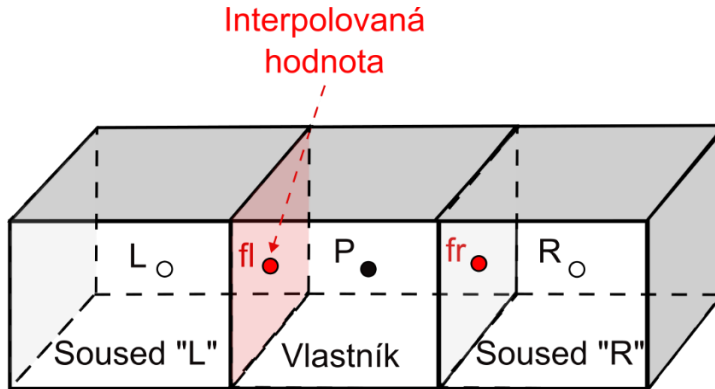
Centrální schéma (Central-Differencing) (2)

- Při řešení může vést k oscilacím až k divergenci, jestliže je místní Pecletovo číslo větší než 2.
- Občas součástí tzv. Hybridního schéma, které umožňuje přepnout na schéma 1. řádu Upwind v případě, že je místní Pecletovo číslo větší než 2.



Centrální schéma (Central-Differencing) (3)

- Hodnota \mathbf{U} na hranici/ploše objemu (\mathbf{U}_f) je získána **lineární interpolací** ve středech objemů (\mathbf{U}_L and \mathbf{U}_P), které leží na obou stranách plochy (**SMĚROVĚ NEZÁVISLÉ SCHÉMA**).



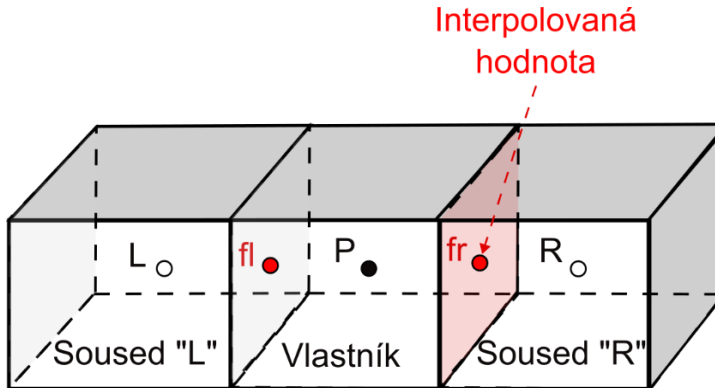
$$U_f = a_P U_P + a_L U_L + a_R U_R \quad (38)$$

$$a_P = \frac{|L f l|}{|L P|}; \quad a_L = \frac{|f l P|}{|L P|} = 1 - \frac{|L f l|}{|L P|}; \quad a_R = 0 \quad (39)$$

$$U_f = \frac{|L f l|}{|L P|} U_P + \left(1 - \frac{|L f l|}{|L P|}\right) U_L \quad (40)$$

Centrální schéma (Central-Differencing) (4)

- Hodnota \mathbf{U} na hranici/ploše objemu (\mathbf{U}_f) je získána **lineární interpolací** ve středech objemů (\mathbf{U}_L and \mathbf{U}_P), které leží na obou stranách plochy (**SMĚROVĚ NEZÁVISLÉ SCHÉMA**).



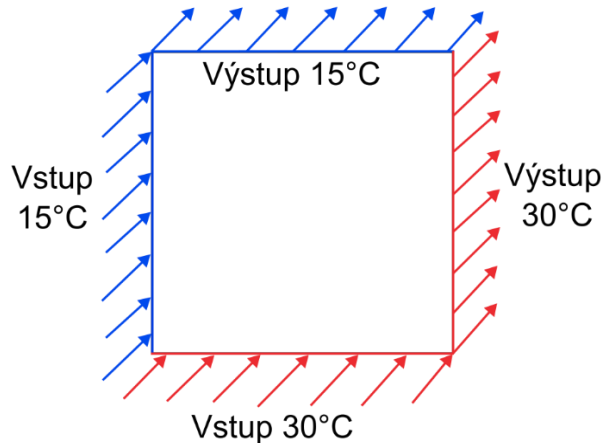
$$U_f = a_P U_P + a_L U_L + a_R U_R \quad (41)$$

$$a_P = \frac{|fr R|}{|PR|}; \quad a_L = 0; \quad a_R = \frac{|P fr|}{|PR|} = 1 - \frac{|fr R|}{|PR|} \quad (42)$$

$$U_f = \frac{|fr R|}{|PR|} U_P + \left(1 - \frac{|fr R|}{|PR|}\right) U_R \quad (43)$$

Přesnost a falešná difúze

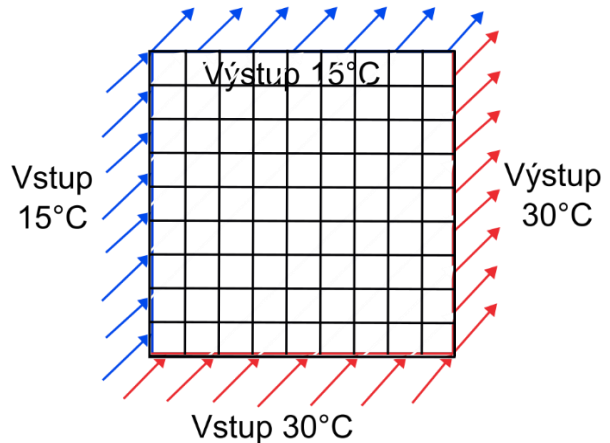
- Vždy se snažíme o kompromis mezi přesností a výpočetní a časovou náročností.
- Občas i méně přesné řešení může být přínosné, protože nám může ukázat důležité trendy v relativně krátkém čase.
- Často je méně přesné řešení použito jako odhad (inicializace) pro přesnější řešení.
- Uvažujme **dva rovnoběžné proudy vzduchu pohybující se stejnou rychlostí ale o různých teplotách pod úhlem 45°**.



Přesnost a falešná difúze

- Vždy se snažíme o kompromis mezi přesností a výpočetní a časovou náročností.
- Občas i méně přesné řešení může být přínosné, protože nám může ukázat důležité trendy v relativně krátkém čase.
- Často je méně přesné řešení použito jako odhad (inicializace) pro přesnější řešení.
- Uvažujme **dva rovnoběžné proudy vzduchu pohybující se stejnou rychlostí ale o různých teplotách pod úhlem 45°.**

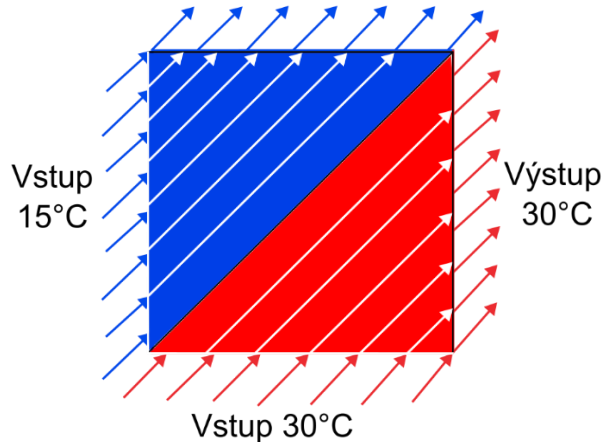
**Velmi hrubá
sít' 9 x 9
(81 buněk)**



Přesnost a falešná difúze

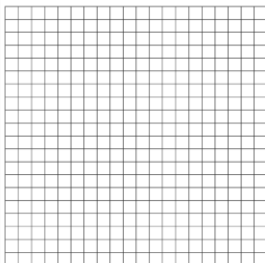
- Vždy se snažíme o kompromis mezi přesností a výpočetní a časovou náročností.
- Občas i méně přesné řešení může být přínosné, protože nám může ukázat důležité trendy v relativně krátkém čase.
- Často je méně přesné řešení použito jako odhad (inicializace) pro přesnější řešení.
- Uvažujme **dva rovnoběžné proudy vzduchu pohybující se stejnou rychlostí ale o různých teplotách pod úhlem 45°.**

**Předpokládané
řešení**

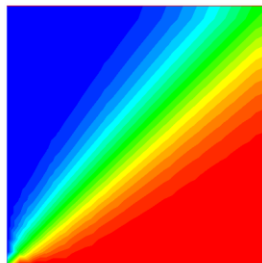


Přesnost a falešná difúze (2)

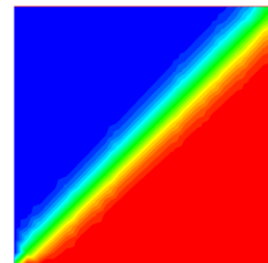
Hrubá
síť 20 x 20
(400 buněk)



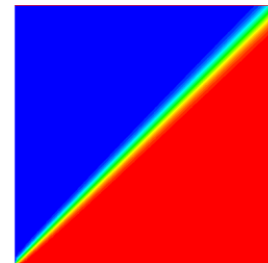
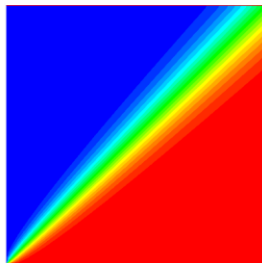
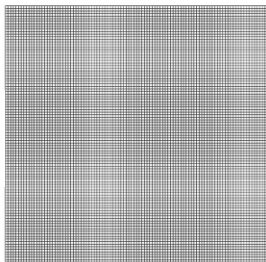
1. řád
(1st Order Upwind)



2. řád
(2nd Order Upwind)



Jemná
síť 100 x 100
(10000 buněk)



Difúzní člen

$$\underbrace{\int_V [\nabla \cdot \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}] dV}_{\text{Konvekce}} = -\frac{1}{\rho} \int_V [\nabla p] dV + \underbrace{\int_V [\nabla \cdot \{\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}\}] dV}_{\text{Difúze}} + \int_V [\mathbf{g}] dV \quad (44)$$

- Věta o divergenci:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad \longrightarrow \quad \int_V \nabla \cdot \{\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}\} dV = \int_S [\{\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}\} \cdot \mathbf{n}] dS \quad (45)$$

- Jelikož je průběh veličin podél ploch lineární, můžeme aproximovat všechny veličiny jejich hodnotami ve středech těchto ploch (\mathbf{f}).

$$\int_S [\{\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}\} \cdot \mathbf{n}] dS = \sum_{i=1}^M [v_{fi} \{\nabla\mathbf{v}\}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi}] S_{fi} \quad (46)$$

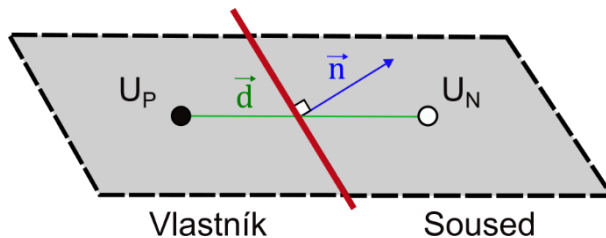
Difúzní člen (2)

- Kinematická viskozita (ν_{fi}) je určena na základě interpolace.

$$\sum_{i=1}^M [\nu_{fi} \{\nabla \mathbf{v}\}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi}] S_{fi} \quad (47)$$

- Problém při řešení způsobuje skalární součin gradientu rychlosti a vektoru vnější normály dané plochy.

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi} \quad (48)$$

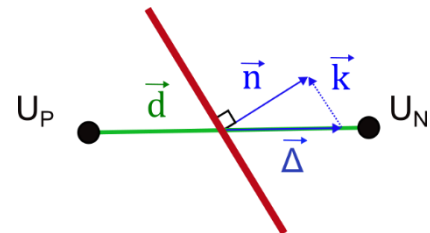
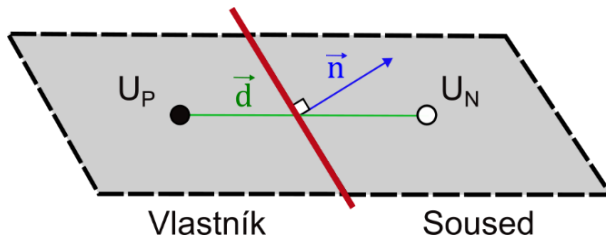


Difúzní člen (3)

- Ve speciálním případě, kdy je vektor vnější normály \mathbf{n} rovnoběžný s vektorem \mathbf{d} , může být tento součin vyjádřen jako:

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\text{fi}} \cdot \mathbf{n}_{\text{fi}} = \frac{U_P - U_N}{|\mathbf{d}|} |\Delta| \quad (49)$$

- **Obecně** toto bohužel **neplatí** a vektor vnější normály není rovnoběžný s vektorem \mathbf{d} (neortogonální síť).
- Tyto případy jsou řešeny rozložením vektoru vnější normály do 2 složek.



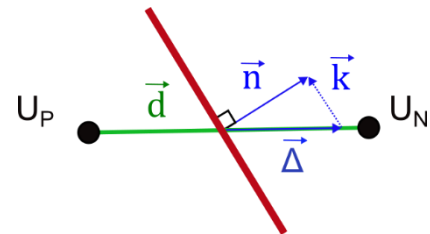
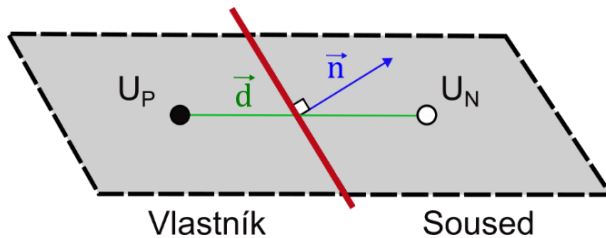
Difúzní člen (4)

- Rozdělení vektoru vnější normály \mathbf{n} do 2 složek:

1. **Ortogonalní složka** $\vec{\Delta}$
2. **Neortogonalní složka** \vec{k}

$$\mathbf{n} = \Delta + \mathbf{k} \quad (\vec{n} = \vec{\Delta} + \vec{k}) \quad (50)$$

- Existuje nekonečně mnoho způsobů jak vektor vnější normály rozložit do složek.
- K rozkladu vektoru do složek se používá několik metod (Metoda pravoúhlého trojúhelníka – metoda minimální korekce, Rotační metoda, Přerelaxovaná metoda).



Difúzní člen (5)

- Nyní nahradíme $\mathbf{n} = \Delta + \mathbf{k}$ v difúzním členu:

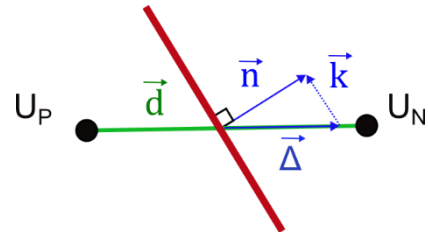
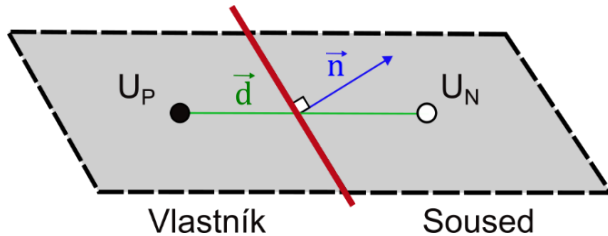
$$\sum_{i=1}^M [v_{fi} \{\nabla \mathbf{v}\}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi}] S_{fi} = \sum_{i=1}^M [v_{fi} \{\nabla \mathbf{v}\}_{fi} \cdot [\Delta_{fi} + \mathbf{k}_{fi}]] S_{fi} \quad (51)$$

$$\sum_{i=1}^M [v_{fi} \{\nabla \mathbf{v}\}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi}] S_{fi} = \underbrace{\sum_{i=1}^M [v_{fi} \{\nabla \mathbf{v}\}_{fi} \cdot \Delta_{fi}] S_{fi}}_{\text{Implicitní}} + \underbrace{\sum_{i=1}^M [v_{fi} \{\nabla \mathbf{v}\}_{fi} \cdot \mathbf{k}_{fi}] S_{fi}}_{\text{Explicitní}} \quad (52)$$

Implicitní
(ortogonální) část

Explicitní
(neortogonální) část

- Člen s ortogonální složkou je řešen **implicitně**, člen s neortogonální složkou je řešen **explicitně**.

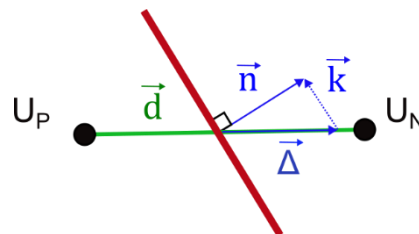
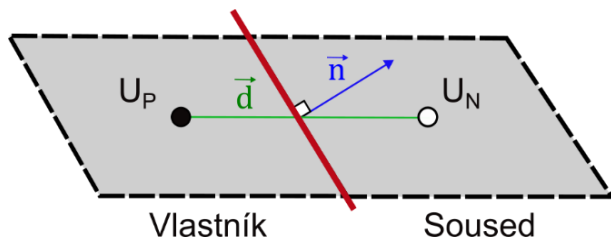


Difúzní člen (6)

- Ortogonální člen je řešen **implicitně**:

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\mathbf{fi}} \cdot \Delta_{\mathbf{fi}} = \frac{U_P - U_N}{|d|} |\Delta_{\mathbf{fi}}| \quad (53)$$

- Velikost tohoto členu určuje **stabilitu systému rovnic**, jeho zvýšením zvyšujeme diagonální dominanci matice soustavy.

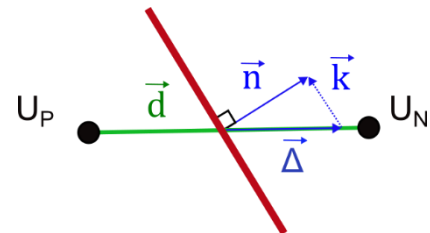
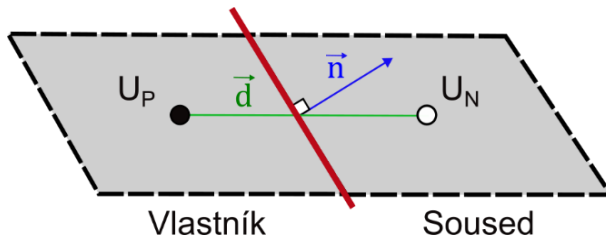


Difúzní člen (7)

- Neortogonální člen je řešen **explicitně**:

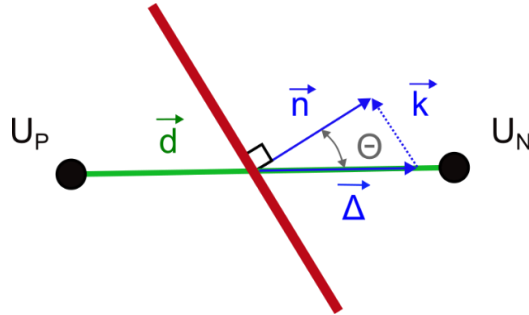
$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{fi} \cdot \mathbf{k}_{fi} < \gamma \frac{U_P - U_N}{|d|} |\Delta_{fi}| \quad (54)$$

- Tento člen je řešen na základě známé rychlosti z předchozí iterace, plní tedy úlohu zdrojového členu.
- Tento člen **snižuje stabilitu systému rovnic**: čím je neortogonalita síť větší, tím je vyšší explicitní člen (stabilitu lze zvýšit snížením γ , avšak za cenu **ztráty přesnosti**).



Difúzní člen (8)

- Úhel Θ mezi vektorem \vec{n} a vektorem $\vec{\Delta}$ je přímo úměrný velikosti vektoru \vec{k} .



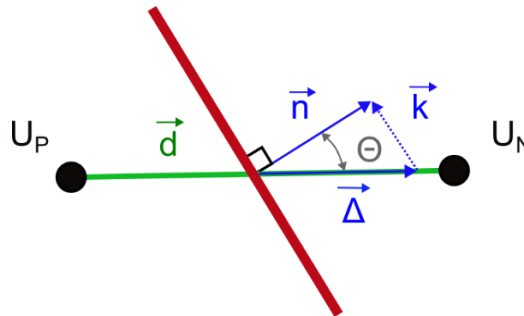
- Platí tedy, že s rostoucím Θ neortogonální korekce roste.
- Z toho plyne, že bychom se měli vždy snažit o co nejkvalitnější síť, pokud se chceme vyhnout obtížím při výpočtu.

Difúzní člen (9)

- Pro velmi nekvalitní síť mohou být nestability při výpočtu částečně potlačeny vhodnou volbou korekčního faktoru (γ) v neortogonálním členu:

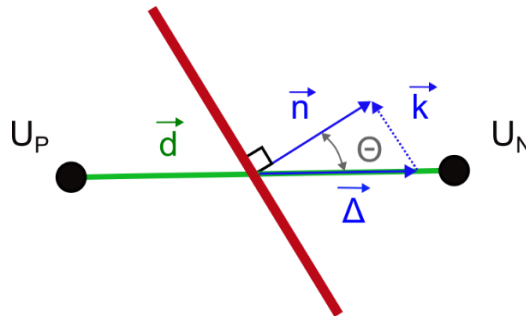
$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\text{fi}} \cdot \mathbf{k}_{\text{fi}} < \gamma \frac{U_P - U_N}{|d|} |\Delta_{\text{fi}}| \quad (55)$$

- V případě $\gamma < 1$, korekce je použita (zvýšení stability řešení na úkor přesnosti).
- V případě $\gamma = 1$, korekce není použita.



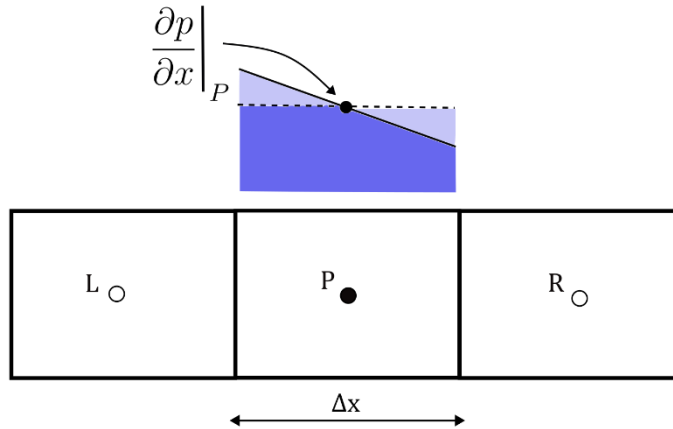
Difúzní člen (10)

- Neortogonální korektory používají aktuální hodnotu rychlosti => nutno iterovat.
- V případě dobré kvality sítě jsou vnější cykly v algoritmu SIMPLE dostačující a pro dosažení konvergence není korekce nutná.
- **V případě špatné kvality sítě** jsou nezbytné dodatečné vnitřní cykly pro řešení rovnice tlaku (pro nestlačitelnou tekutinu), tzv. **neortogonální korektory**.



Tlakový člen

- Připomeňme, že MKO 2. řádu předpokládá lineární průběh veličin napříč objemem (plochou).



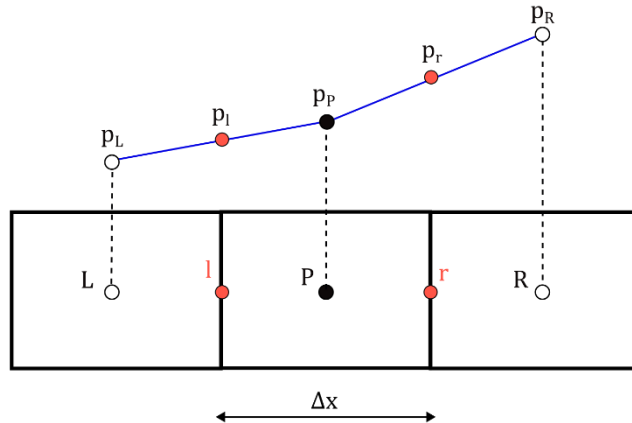
$$-\frac{1}{\rho} \int_V [\nabla p] dV = -\frac{1}{\rho} \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_P V_P \quad (56)$$

Tlakový člen (2)

- Náhrada tlakového gradientu vztahem (57) je jednou z nejjednodušších, avšak za určitých podmínek (často) může vést k oscilacím tlakového pole při řešení.

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_P = \frac{p_r - p_l}{\Delta x} = \frac{p_R - p_L}{2\Delta x} \quad (57)$$

- Gradient tlaku v bodě P závisí na tlaku ve středech L a R, nikoliv na tlaku v bodě P!
- V moderních CFD kódech se využívá tzv. Rhie&Chow interpolace (pokročilé).



Shrnutí přednášky

- Princip metody konečných objemů
- Způsoby diskretizace jednotlivých členů v N-S rovnicích (konvekce, difúze, zdrojový člen, ..)
- Neortogonalita výpočetní sítě – způsoby řešení



Děkuji za pozornost