Matematický popis proudění a přestupu tepla ve výpočetní dynamice tekutin (CFD)

Jan Kracík (jan.kracik@tul.cz)

Obsah přednášky

- Základní pojmy a dělení proudění
- Eulerův a Lagrangeův popis
- Zákony zachování hmoty, hybnosti a energie
- Zachování obecné veličiny

Základní pojmy a dělení proudění

Základní pojmy

- **Navier-Stokesovy (N-S) rovnice** pro popis proudění.

- **Tekutiny** jsou látky, které **se trvale nedeformují pod zatížením na rozdíl od tuhých látek**.

- Tekutiny jsou uvedeny do pohybu, pokud na ně působí vnější síly.

- **Tuhé látky zaujímají definovaný tvar, tekutiny nikoliv.**

- V inženýrské praxi se zaměřujeme na makroskopické chování tekutin.

- **Předpoklad kontinua**

Použité značení:

1. Skalární veličina - a nebo (a)
2. Vektorová veličina - $\mathbf{a}$ nebo $[\mathbf{a}]$
3. Tenzor 2. řádu - $\{\mathbf{A}\}$ nebo $\{\boldsymbol{\alpha}\}$

Dělení proudění

- Dělení dle dimenze problému:
  - **Jednodimenzionální** proudění (1D)
  - **Vícedimenzionální** proudění (2D, 3D)
- Dělení dle závislosti na čase:
  - **Stacionární** proudění
  - **Nestacionární** proudění

Dělení proudění (2)

- Dělení dle počtu fází:
    - **Jednofázové** proudění
    - **Vícefázové** proudění
- Dělení dle uvažování viskozity:
    - **Ideální (nevazké)** proudění
    - **Reálné (vazké)** proudění

Dělení proudění (3)

- Dělení dle chování viskozity:
  - Proudění **Newtonovských tekutin**
  - Proudění **Nenewtonovských tekutin**
- Dělení dle stupně turbulence (Reynoldsova čísla):
  - **Laminární** proudění
  - **Přechodové** proudění
  - **Turbulentní** proudění

Dělení proudění (4)

- Dělení dle stlačitelnosti:
  - Proudění **nestlačitelných tekutin** (Ma ≤ 0,3)
  - Proudění **stlačitelných tekutin** (Ma > 0,3)
- Dělení proudění dle rychlosti stlačitelné tekutiny:
  - Proudění **podzvukové (subsonické)** (Ma < 1)
  - Proudění **zvukové (transsonické**) (Ma = 0,9 až 1,1)
  - Proudění **nadzvukové (supersonické)** (1 < Ma <5)
  - Proudění **hypersonické** (Ma >5)

Dělení proudění (5)

- Dělení dle rotace částic tekutin:

  - **Nerotační (potenciální)** proudění ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$)
  - **Rotační** proudění ($\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$)

Dělení proudění (6)

- Klasifikace proudění z hlediska parciálních diferenciálních rovnic, které jej popisují:

    - Proudění popsané **eliptickým typem rovnic** $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=f$
    - Proudění popsané **parabolickým typem rovnic** $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$
    - Proudění popsané **hyperbolickým typem rovnic** $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$

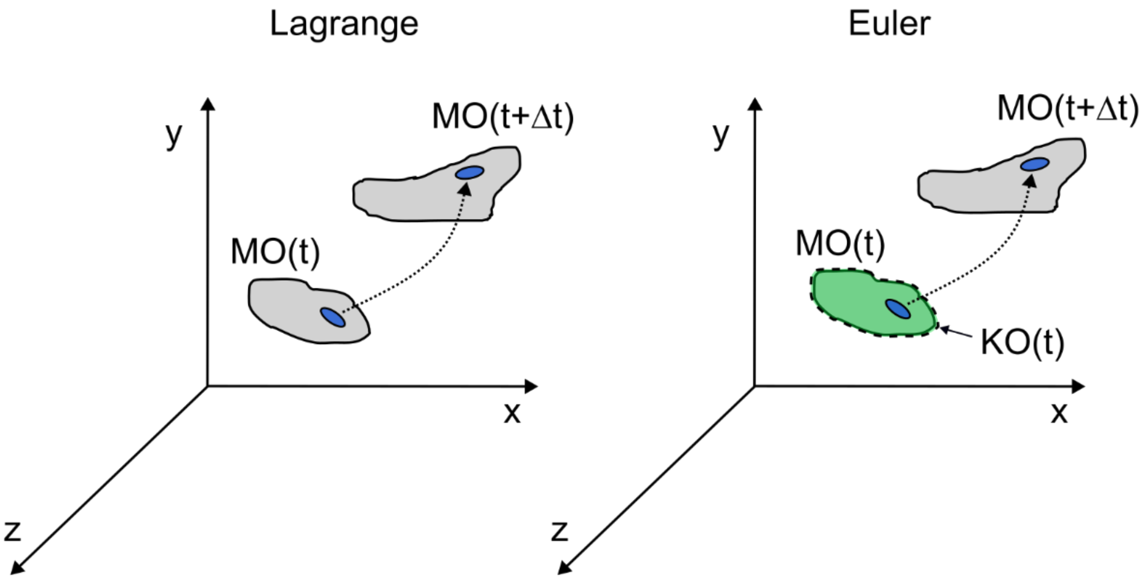
- Každý z uvedených typů rovnic vyžaduje speciální přístup při řešení.

- N-S rovnice jsou nelineární parciální diferenciální rovnice 2. řádu s obecně 4 nezávislými proměnnými (x, y, z, t).

Eulerův a Lagrangeův popis

Eulerův a Lagrangeův popis

- Zákony zachování pro popis proudění a přenosu tepla mohou být formulovány 2 odlišnými přístupy.
- **Lagrange** = Materiálový objem (MV), **Euler** = Kontrolní objem (CV).



Eulerův a Lagrangeův popis (2)

- Proměnné jsou funkcí polohy (x) a času (t), rychlost proudění je pak v(x, t).

- 2 uvedené přístupy jsou vzájemně provázány následovně:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{x_0}, \mathrm{t}), \mathrm{t}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\mathbf{x}(\mathbf{x_0}, \mathrm{t}) \tag{1}$$

$$\mathbf{x}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \mathrm{x}(\mathrm{t})\mathbf{i} + \mathrm{y}(\mathrm{t})\mathbf{j} + \mathrm{z}(\mathrm{t})\mathbf{k} \tag{2}$$

- V závislosti na zvoleném přístupu jsou proměnné sledovány v kontrolním objemu či protékané oblasti (Euler), nebo sledováním materiálového objemu (Lagrangian).

Eulerův a Lagrangeův popis (3)

- **Pro CFD se zásadně využívá Eulerova přístupu** — metoda konečných objemů (MKO).

- Pro strukturální analýzu je hojně využíván Lagrangeův přístup — metoda konečných prvků (MKP).

- Pro obecnou proměnnou φ = φ(x, y, z, t) platí:

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{MV} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{3}$$

- φ = φ(x, y, z, t) představuje obecně jakoukoliv proměnnou, skalár nebo vektor, např. rychlost, tlak, teplota, …

Eulerův a Lagrangeův popis (4)

- φ = φ(x, y, z, t) představuje obecně jakoukoliv proměnnou, skalár nebo vektor, např. rychlost, tlak, teplota, …

$$\frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{Dt}} = \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathrm{MV}} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dt}} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{Dt}} = \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}_{\textbf{Lokální změna veličiny v čase}} + \underbrace{\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi}_{\textbf{Konvektivní změna veličiny}} \tag{4}$$

Zákony zachování hmoty, hybnosti a energie

Zákon zachování hmoty

- Rovnice kontinuity popisuje **zachování hmoty**.

$$\left(\frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathrm{MV}} = 0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}(\rho V)}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathrm{MV}} = 0$$

Zachování hmoty

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{Lokální změna hustoty v čase}} + \underbrace{\nabla \cdot [\rho \mathbf{v}]}_{\text{Konvektivní změna hustoty}} = 0} \qquad (5)$$

Zákon zachování hmoty (2)

- V případě absence výrazných změn tlaku nebo teploty můžeme předpokládat rovnici kontinuity pro **nestlačitelnou tekutinu**.

Zachování hmoty pro nestlačitelnou tekutinu

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{v} = 0} \tag{6}$$

Zákon zachování (lineární) hybnosti

- Zachování **lineární hybnosti**, tj. p = mv.

$$\left(\frac{\mathrm{d}[\mathrm{m}\mathbf{v}]}{\mathrm{dt}}\right)_{\mathrm{MV}} = \left(\int_{\mathrm{V}} \mathbf{f}\,\mathrm{dV}\right)_{\mathrm{MV}} = \int_{\mathrm{V}} \mathbf{f}\,\mathrm{dV}$$

$$\left(\int_{\mathrm{V}} \frac{\mathrm{d}[\rho\mathbf{v}]}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{dV}\right)_{\mathrm{MV}} = \int_{\mathrm{V}} \mathbf{f}\,\mathrm{dV}$$

Zachování hybnosti

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial \mathrm{t}}}_{\text{Lokální změna hybnosti v čase}} + \underbrace{\nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\}}_{\text{Konvektivní změna hybnosti}} = \underbrace{\mathbf{f}}_{\text{Vnější síly}}} \qquad (7)$$

Zákon zachování (lineární) hybnosti (2)

- Vnější síly dělíme na **plošné** (f_s) a **objemové** (f_b).

$$\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial t} + \nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = \sum_i \mathbf{f_i} = \mathbf{f_s} + \mathbf{f_b} \qquad (8)$$

- V tomto tvaru je jednotkou každého členu v rovnici N/m^3.

- $\mathbf{f_b}$ obvykle zahrnuje pouze gravitační sílu.

$$\mathbf{f_b} = [\rho\mathbf{g}] \qquad (9)$$

- Ve speciálních případech můžou být zahrnuty i další objemové síly.

Zákon zachování (lineární) hybnosti (3)

- $\mathbf{f_s}$ zahrnuje síly působící na kontrolní objem vlivem tlaku a tečného napětí (vazkost).

$$\mathbf{f_s}\mathrm{d}V = \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \mathbf{dS} = \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \mathbf{n}\mathrm{d}S \qquad (10)$$

- Aplikací **Gaussovy-Ostrogradského věty** získáme

$$\int_{\mathbf{V}} \mathbf{f_s}\mathrm{d}V = \int_{\mathbf{S}} \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \mathbf{n}\mathrm{d}S = \int_{\mathbf{V}} \nabla \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\}\mathrm{d}V \qquad (11)$$

- $\mathbf{f_s}$ může být vyjádřeno následovně:

$$\mathbf{f_s} = \nabla \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} \qquad (12)$$

Zákon zachování (lineární) hybnosti (4)

- Po úpravách a dosazení máme následující tvar N-S rovnice:

$$\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial \mathrm{t}} + \nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = \mathbf{f_s} + \mathbf{f_b} = \nabla\cdot\{\boldsymbol{\sigma}\} + [\rho\mathbf{g}] \tag{13}$$

- Tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ lze pak vyjádřit jako:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = -\mathrm{p}\{\mathbf{I}\} + \{\boldsymbol{\tau}\} \tag{14}$$

Zákon zachování (lineární) hybnosti (5)

- Zákon zachování hybnosti je vyjádřen následovně:

Zachování hybnosti

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial t}}_{\textbf{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla\cdot\{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\}}_{\textbf{Konvektivní člen}} = \underbrace{-\nabla p}_{\textbf{Tlakové síly}} + \underbrace{\nabla\cdot\{\boldsymbol{\tau}\}}_{\textbf{Vazké síly}} + \underbrace{[\rho\mathbf{g}]}_{\textbf{Gravitační síly}}} \quad (15)$$

- Tenzor tečných napětí se v případě newtonovských tekutin vyjadřuje jako:

$$\{\boldsymbol{\tau}\} = \mu\left(\{\nabla\mathbf{v}\} + \{\nabla\mathbf{v}\}^{\mathbf{T}}\right) - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{v})\{\mathbf{I}\} \quad (16)$$

Zákon zachování (lineární) hybnosti (6)

- Konečný tvar zákonu zachování hybnosti **pro newtonovskou tekutinu**:

$$\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial t} + \nabla \cdot \{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = -\nabla p + \nabla \cdot \left\{\mu\left(\{\nabla\mathbf{v}\} + \{\nabla\mathbf{v}\}^{\mathbf{T}}\right) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{v})\{\mathbf{I}\}\right\} + [\rho\mathbf{g}] \quad (17)$$

Zákon zachování energie

- Zachování energie vychází z 1. zákona termodynamiky vyjádřeného ve formě celkové energie $E_{total} = m(e_{internal} + 1/2 \cdot \mathbf{|v|} \cdot \mathbf{|v|})$:

1. Zákon termodynamiky

$$\boxed{\left(\frac{dE_{total}}{dt}\right)_{MV} = \dot{Q} - \dot{W}} \qquad (18)$$

$$\underbrace{\left(\frac{dE_{total}}{dt}\right)_{MV}}_{\text{Rychlost změny celkové energie}} = \underbrace{\dot{Q}}_{\text{Teplo dodané do systému}} - \underbrace{\dot{W}}_{\text{Práce odvedená systémem}}$$

- Oba členy na pravé straně rovnice (18) jsou složeny ze 2 částí:

$$\left(\frac{dE_{total}}{dt}\right)_{MV} = \dot{Q}_s + \dot{Q}_b - \dot{W}_s - \dot{W}_b \qquad (19)$$

Zákon zachování energie (2)

- Míra odvedené **práce za čas = výkon**.

$$\dot{W}_s = -\int_s [\mathbf{f_S} \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{dS} \quad (19) \qquad \dot{W}_b = -\int_V (\mathbf{f_b} \cdot \mathbf{v}) dV = -\int_V ([\rho \mathbf{g}] \cdot \mathbf{v}) dV \quad (20)$$

- Výkon plošných sil je vyjádřen jako:

$$\dot{W}_s = -\int_S [\mathbf{f_S} \cdot \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{S} = -\int_S [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} dS = -\int_V \nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}] dV = \quad (21)$$

$$= -\int_V \nabla \cdot [\{-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}\} \cdot \mathbf{v}] dV = -\int_V (-\nabla \cdot [p\mathbf{v}] + \nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]) dV$$

Zákon zachování energie (3)

- Tepelný zdroj v kontrolním objemu:

$$\dot{\mathrm{Q}}_{\mathrm{b}} = \dot{\mathrm{Q}}_{\mathrm{V}} = \int_{\mathrm{V}} \dot{\mathrm{q}}_{\mathrm{V}} \mathrm{dV} \qquad (22)$$

- Prostup tepla plochou kontrolního objemu je vyjádřen následovně:

$$\dot{\mathrm{Q}}_{\mathrm{s}} = -\int_{\mathrm{S}} [\dot{\mathbf{q}}_{\boldsymbol{s}}] \cdot [\mathrm{d}\mathbf{S}] = -\int_{\mathrm{S}} [\dot{\mathbf{q}}_{\boldsymbol{s}}] \cdot [\mathbf{n}]\mathrm{dS} = -\int_{\mathrm{V}} \nabla \cdot [\dot{\mathbf{q}}_{\boldsymbol{s}}]\mathrm{dV} \qquad (23)$$

Zákon zachování energie (4)

- Zákon **zachování energie** je po dosazení a úpravách vyjádřen jako:

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{total}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{MV}} = \int_V \left(\frac{\partial(\rho e_{\mathrm{total}})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho e_{\mathrm{total}}\mathbf{v}]\right)\mathrm{d}V =$$

$$= -\int_V \nabla \cdot [\dot{\mathbf{q}}_{\boldsymbol{s}}]\mathrm{d}V + \int_V \dot{q}_V \mathrm{d}V + \int_V (-\nabla \cdot [p\mathbf{v}] + \nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}])\mathrm{d}V + \int_V ([\rho\mathbf{g}] \cdot \mathbf{v})\mathrm{d}V \qquad (24)$$

Zákon zachování energie (5)

- Zákon **zachování energie** po převedení do diferenciálního tvaru:

Zachování energie

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial(\rho e_{total})}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla \cdot [\rho e_{total}\mathbf{v}]}_{\text{Konvektivní člen}} = \underbrace{-\nabla \cdot [\dot{\mathbf{q}}_s]}_{\text{Tepelný tok stěnami objemu}} + \underbrace{\dot{q}_V}_{\text{Tepelný zdroj v objemu}} \underbrace{- \nabla \cdot [p\mathbf{v}]}_{\text{Výkon tlakových sil}} + \underbrace{\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]}_{\text{Výkon vazkých sil}} + \underbrace{[\rho\mathbf{g}] \cdot \mathbf{v}}_{\text{Výkon gravitačních sil}}} \tag{25}$$

Zákony zachování při proudění tekutin- Shrnutí

Zachování hmoty

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla \cdot [\rho \mathbf{v}]}_{\text{Konvektivní člen}} = 0} \qquad (5)$$

Zachování hybnosti

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial [\rho \mathbf{v}]}{\partial t}}_{\text{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla \cdot \{\rho \mathbf{v}\mathbf{v}\}}_{\text{Konvektivní člen}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{Tlakové síly}} + \underbrace{\nabla \cdot \{\boldsymbol{\tau}\}}_{\text{Vazké síly}} + \underbrace{[\rho \mathbf{g}]}_{\text{Gravitační síly}}} \qquad (15)$$

Zákony zachování při proudění tekutin- Shrnutí (2)

Zachování energie

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial(\rho e_{\mathrm{total}})}{\partial t}}_{\substack{\textbf{Nestacionární}\\ \textbf{člen}}} + \underbrace{\nabla \cdot [\rho e_{\mathrm{total}} \mathbf{v}]}_{\substack{\textbf{Konvektivní}\\ \textbf{člen}}} = \underbrace{-\nabla \cdot [\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{s}}]}_{\substack{\textbf{Tepelný}\\ \textbf{tok}\\ \textbf{stěnami}\\ \textbf{objemu}}} + \underbrace{\dot{q}_V}_{\substack{\textbf{Tepelný}\\ \textbf{zdroj}\\ \textbf{v objemu}}} \underbrace{- \nabla \cdot [p\mathbf{v}]}_{\substack{\textbf{Výkon}\\ \textbf{tlakových}\\ \textbf{sil}}} + \underbrace{\nabla \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}]}_{\substack{\textbf{Výkon}\\ \textbf{vazkých}\\ \textbf{sil}}} + \underbrace{[\rho \mathbf{g}] \cdot \mathbf{v}}_{\substack{\textbf{Výkon}\\ \textbf{gravitačních}\\ \textbf{sil}}}} \qquad (25)$$

Zachování obecné veličiny

Zákon obecné veličiny

- **Pro obecnou proměnnou φ = φ(x, y, z, t)** platí následující rovnice:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}}_{\textbf{Nestacionární člen}} + \underbrace{\nabla\cdot[\rho\varphi\mathbf{v}]}_{\textbf{Konvektivní člen}} = \underbrace{\nabla\cdot\left(\Gamma_\varphi\nabla\varphi\right)}_{\textbf{Difuzní člen}} + \underbrace{S_\varphi}_{\textbf{Zdrojový člen}}} \tag{26}$$

- φ může představovat skalární nebo vektorovou veličinu.

- Tato rovnice je velice důležitá při diskretizaci jednotlivých členů v CFD.

Shrnutí přednášky

- Základní **dělení proudění**
- **Lagrangeův a Eulerův popis**
- Základní **zákony zachování při proudění tekutin** a přenosu tepla

Děkuji za pozornost

Jan Kracík (jan.kracik@tul.cz)