



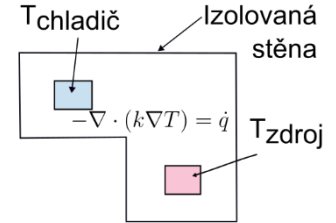
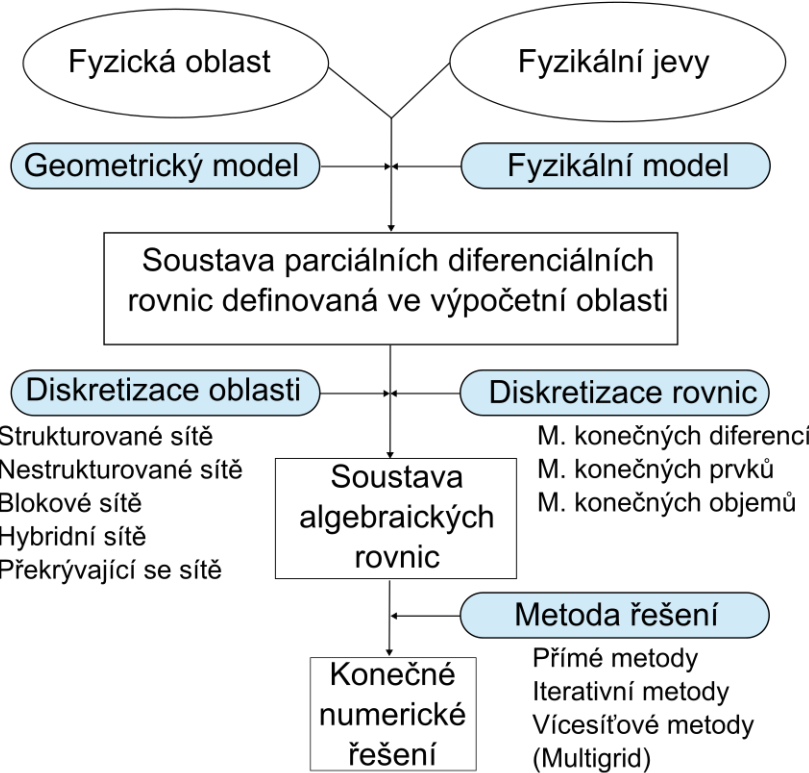
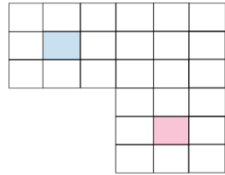
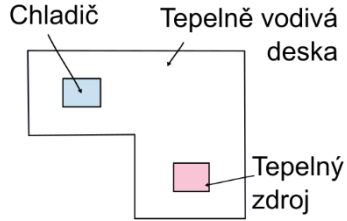
# Diskretizační proces a řešení systému rovnic

# Obsah přednášky

- Proces diskretizace
- Geometrický a fyzikální model
- Diskretizace oblasti (domény) a diskretizace rovnic
- Topologie a konektivita výpočetní sítě
- Řešení diskretizovaných rovnic

# Proces diskretizace

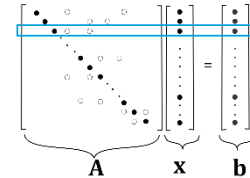
# Proces diskretizace krok po kroku



$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + Q$$



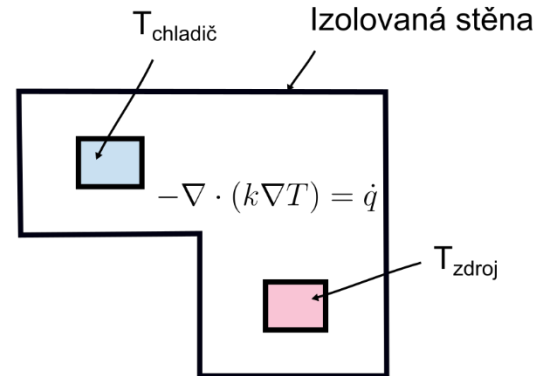
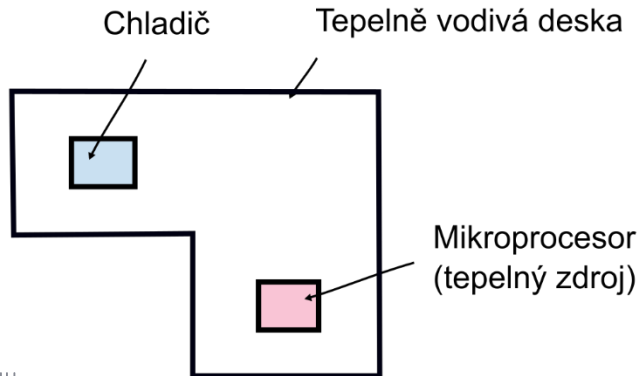
$$a_P\phi_P + \sum_{nb=1}^N a_{nb}\phi_{nb} = b_P$$



# Geometrický a fyzikální model

# Geometrický a fyzikální model

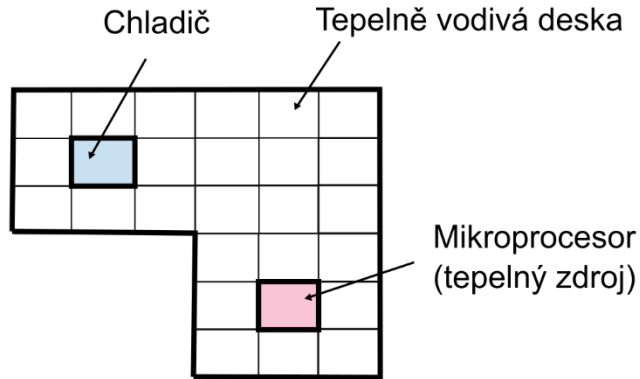
- Dvě úrovně modelování:
  - **geometrický model**
  - **fyzikální model**
- Vždy je snaha zanedbat, zjednodušit co nejvíce to lze (3D vs 2D, symetrie, apod.).



# Diskretizace oblasti (domény) a diskretizace rovnic

# Diskretizace oblasti a diskretizace rovnic

- Geometrický model (oblast) musí být rozdělen na konečný počet podoblastí (objemů/elementů/buněk) a parciální diferenciální rovnice musí být převedeny do algebraické podoby.
- Numerické řešení diskretizovaných diferenciálních rovnic spočívá v hledání hodnot závisle proměnné veličiny  $\phi$  ve specifikovaných bodech výpočetní sítě, což mohou být středy objemů nebo jejich uzly (méně časté v MKO).



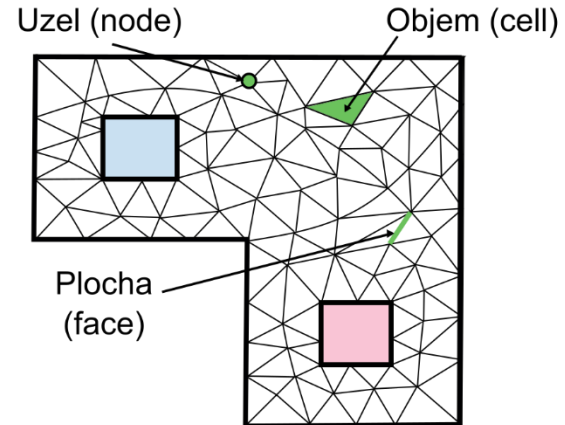
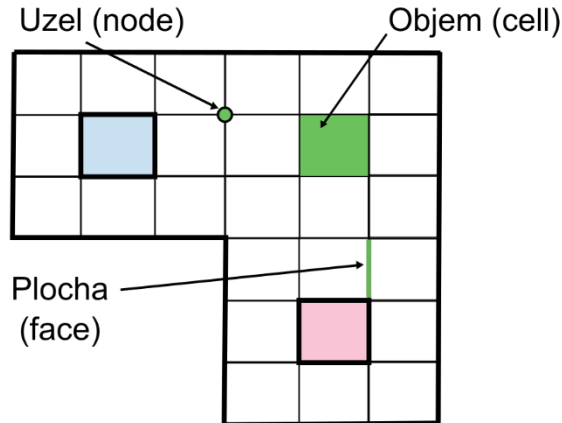
$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + Q$$



$$a_P\phi_P + \sum_{nb=1}^N a_{nb}\phi_{nb} = b_P$$

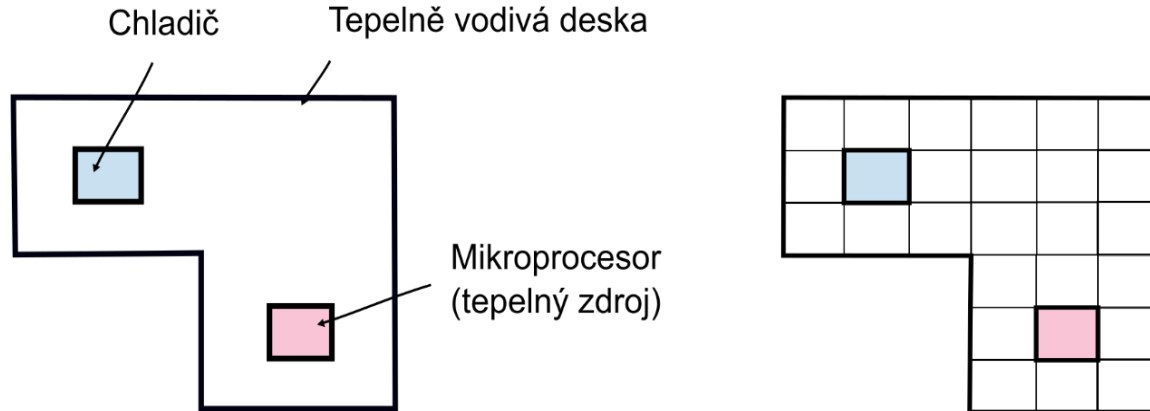
# Názvosloví síť a typy elementů

- Oblast může být rozdělena na podoblasti rovnoměrně nebo nerovnoměrně.
- Používají se **strukturované, nestrukturované** a **hybridní** typy sítí.
- Síť je tvořena konečnými objemy, jejich hraničními plochami a uzly. Objemy, plochy a uzly jsou vnitřní a hraniční (okrajové podmínky).



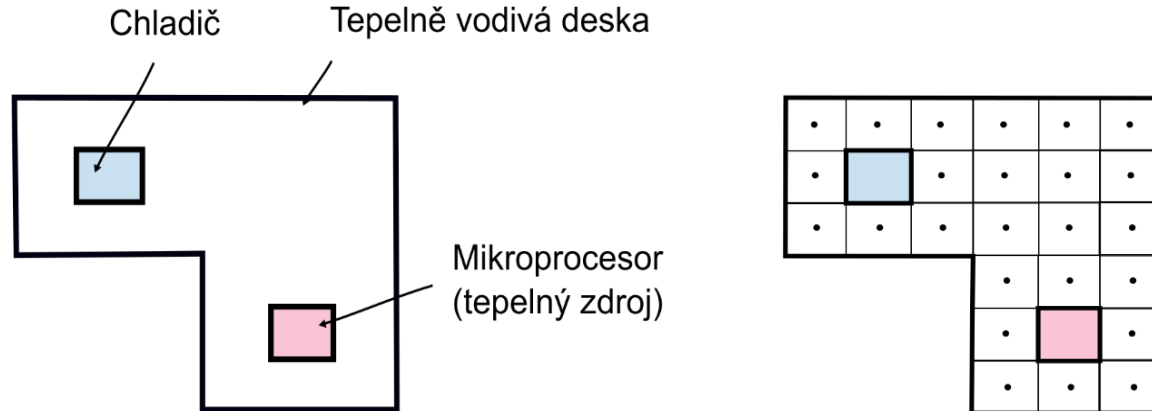
# Diskretizace oblasti – uložené informace o proměnných

- Hodnoty proměnných jsou obvykle uloženy ve středech objemů (Ansys Fluent, OpenFOAM).
- Ansys CFX ukládá hodnoty proměnných v uzlech jednotlivých objemů.
- Obecně platí, že objemy se nesmí překrývat ani chybět (ale jsou výjimky).



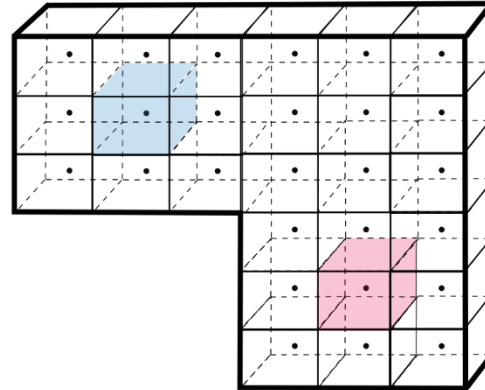
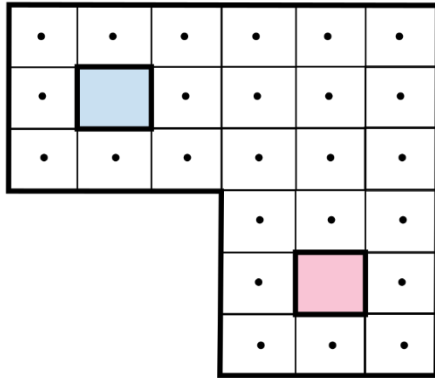
# Diskretizace oblasti – uložení informace o proměnných

- Hodnoty proměnných jsou obvykle uloženy ve středech objemů (Ansys Fluent, OpenFOAM).
- Ansys CFX ukládá hodnoty proměnných v uzlech jednotlivých objemů.
- Obecně platí, že objemy se nesmí překrývat ani chybět (ale jsou výjimky).



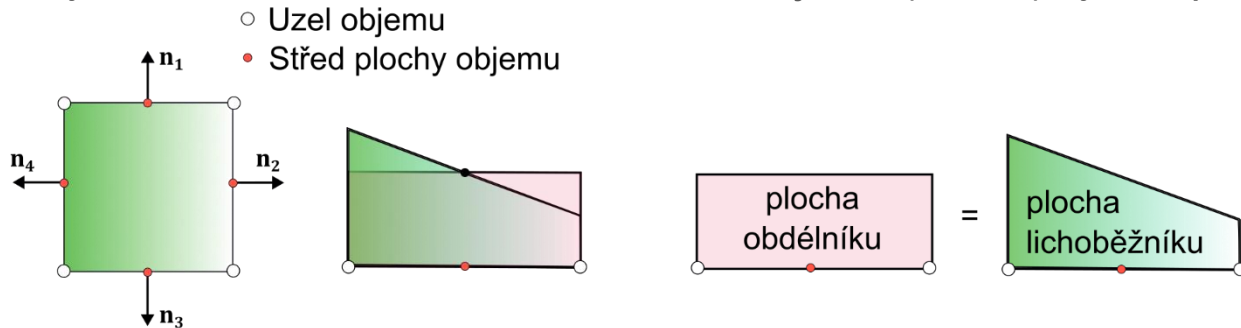
## Dimenze oblasti - 1D, 2D, 3D

- Některé SW umožňují pracovat pouze s 3D geometrií.
- 1D a 2D problémy jsou pak ošetřeny speciálními okrajovými podmínkami (OpenFOAM).



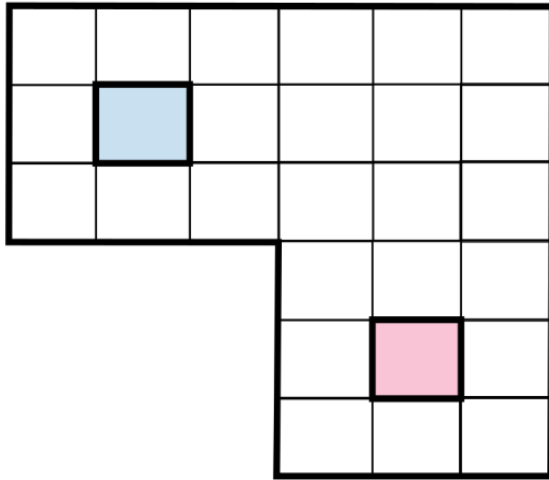
# Průběh proměnné napříč objemem a plochou

- Proměnné ( $p$ ,  $T$ ,  $U$ , ...) mají napříč objemem/buňkou a hraniční plochou objemu lineární průběh (MKO 2. řádu).
- Hodnoty proměnných ( $p$ ,  $T$ ,  $U$ , ...) jsou počítány a uloženy ve středech objemů ( $P$ ,  $N$ , ...).
- Hodnoty na hranicích objemů (ve středech ploch) jsou určeny na základě hodnot ve středech sousedících objemů (interpolační schémata).
- Každý kontrolní objem má “M” sousedních kontrolních objemů (buněk), tj. “M” ploch.

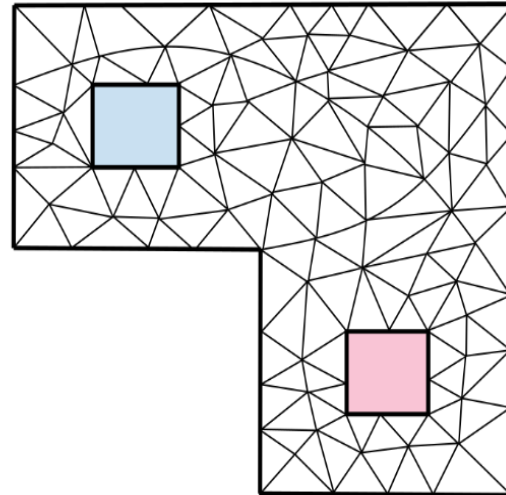


# Topologie sítě a typy buněk

Čtyřúhelníková síť  
(2D Quadrilaterals)



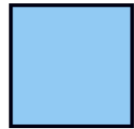
Trojúhelníková síť  
(2D triangles)



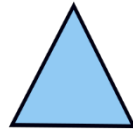
# Používané typy elementů pro CFD

- **Šestistěny, čtyřstěny**, mnohostěny (polyhedry), klínové, pyramidové elementy, ...

2D



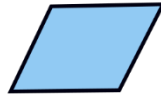
čtýrúhelník



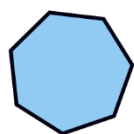
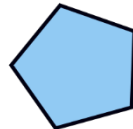
trojúhelník



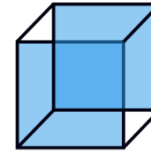
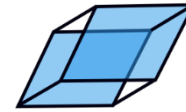
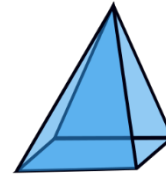
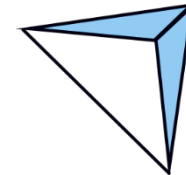
lichoběžník



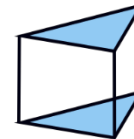
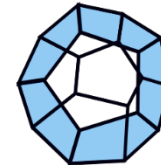
kosodélník

Polygon  
(heptagon)Polygon  
(pentagon)

3D

šestistěn  
(hranol)šestistěn  
(zkosený)pětistěn  
(pyramida)

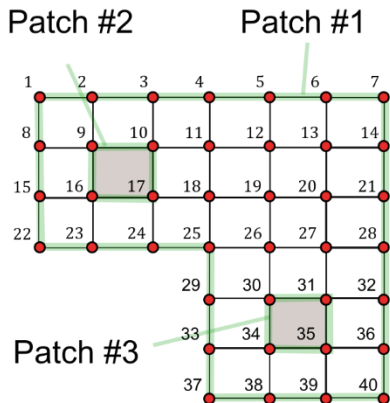
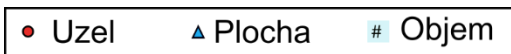
čtýřstěn

pětistěn  
(hranol)mnohostěn  
(polyhedron)

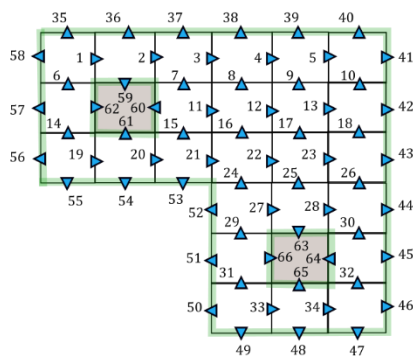
# Topologie a konektivita výpočetní sítě

# Uspořádání a konektivita sítě

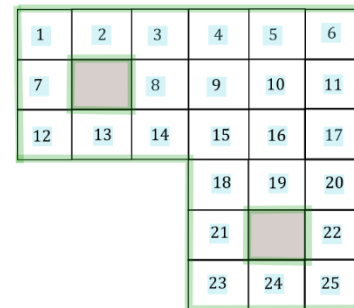
- Všechny **uzly**, **plochy** a **objemy** sítě musí být uloženy dle určité metodiky (systematicky).



Celkem uzlů = 40



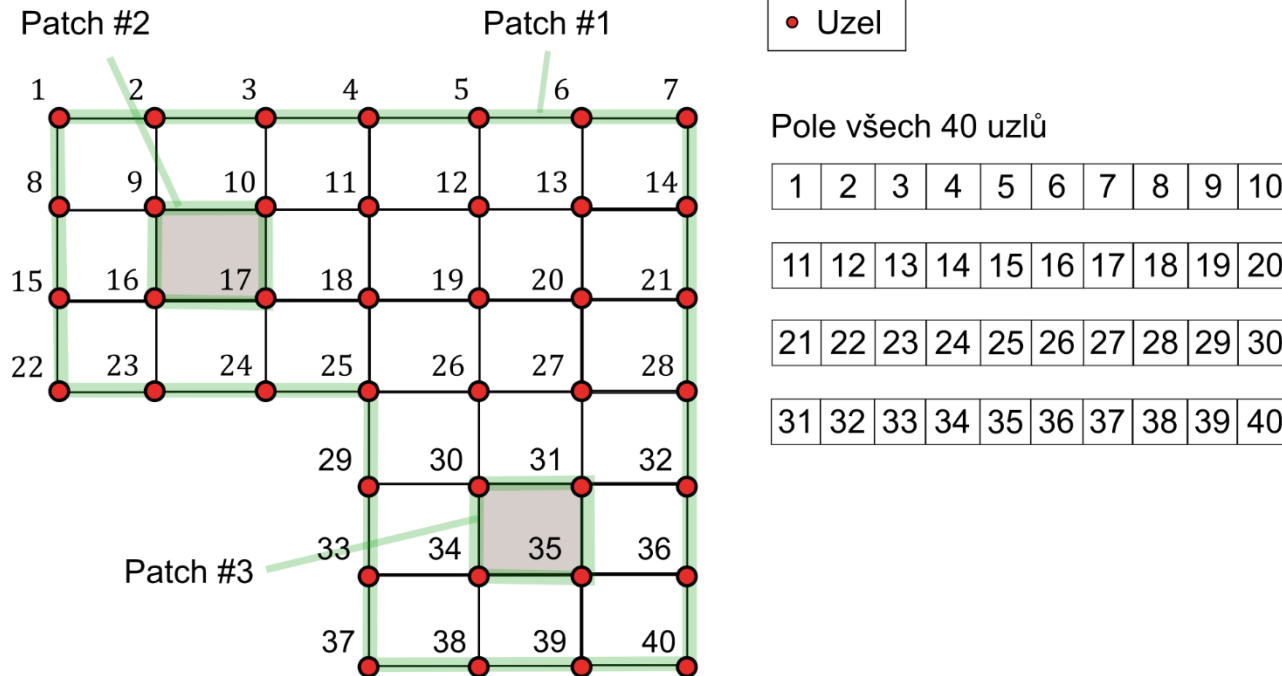
Celkem ploch = 66



Celkem objemů = 25

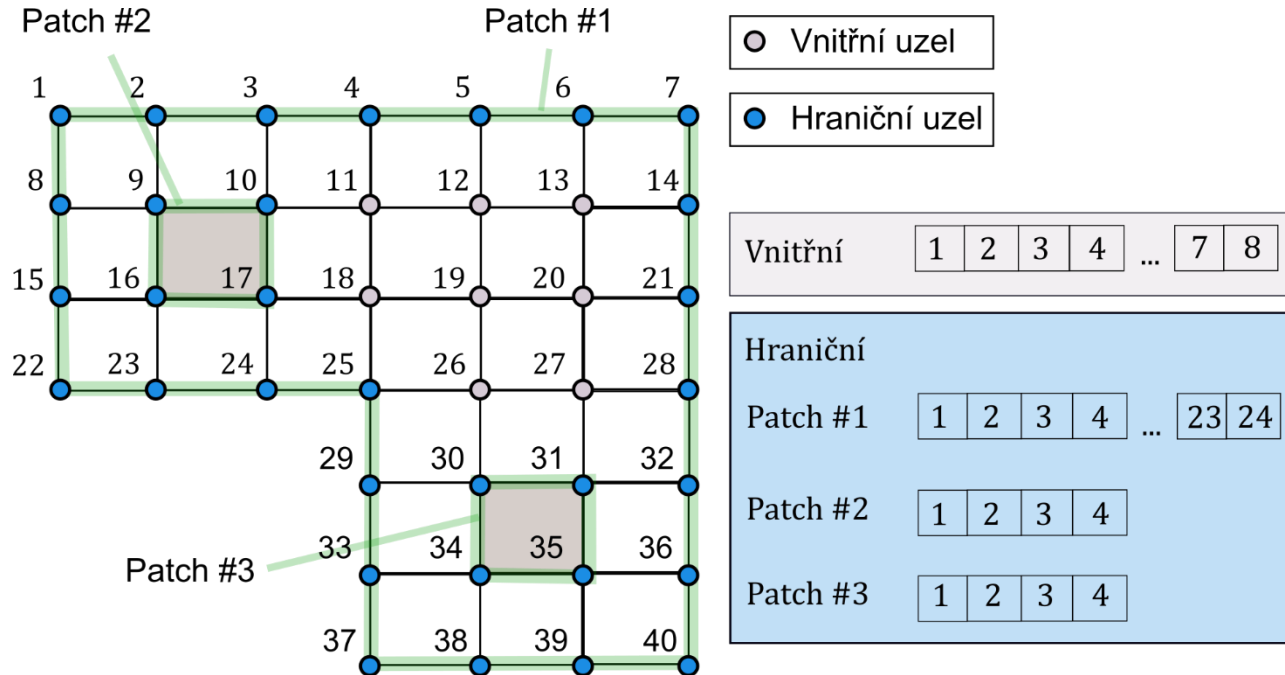
# Uspořádání sítě – uzly

- Označení jednotlivých uzlů vzhledem k celé oblasti = **globální značení**.



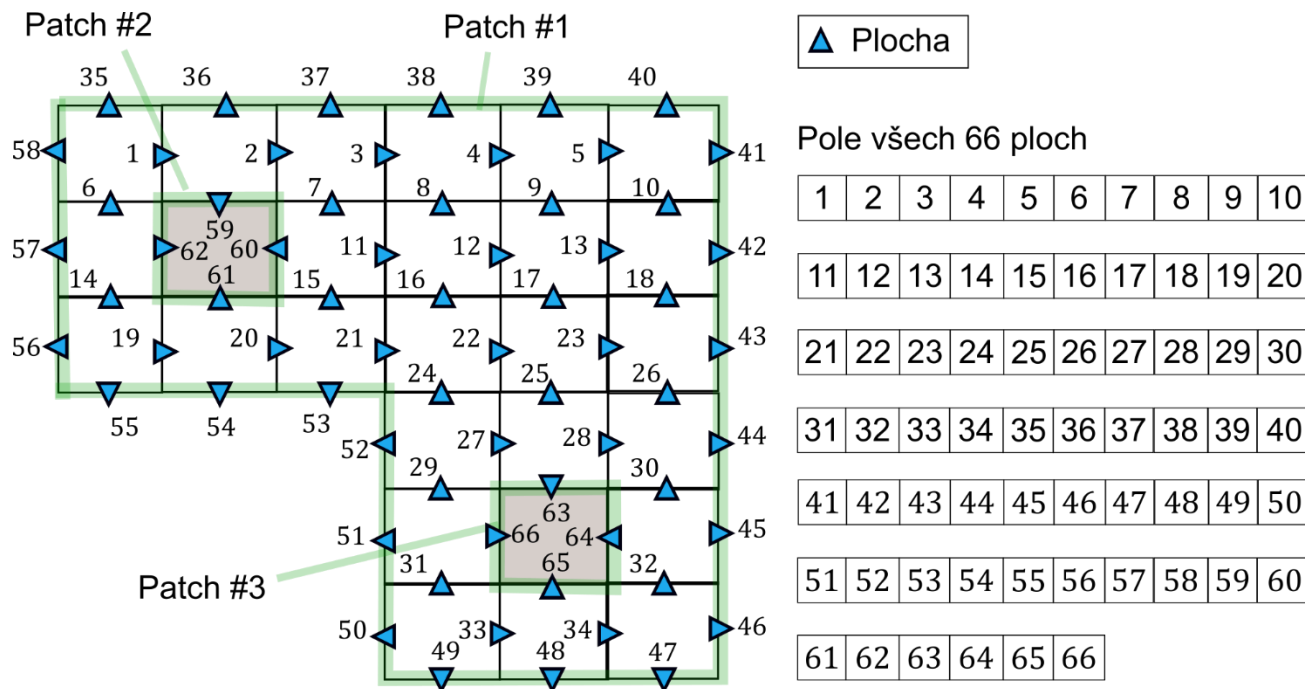
# Uspořádání sítě – uzly (2)

- Označení jednotlivých uzlů vzhledem k příslušné okrajové podmínce = **lokální značení**.



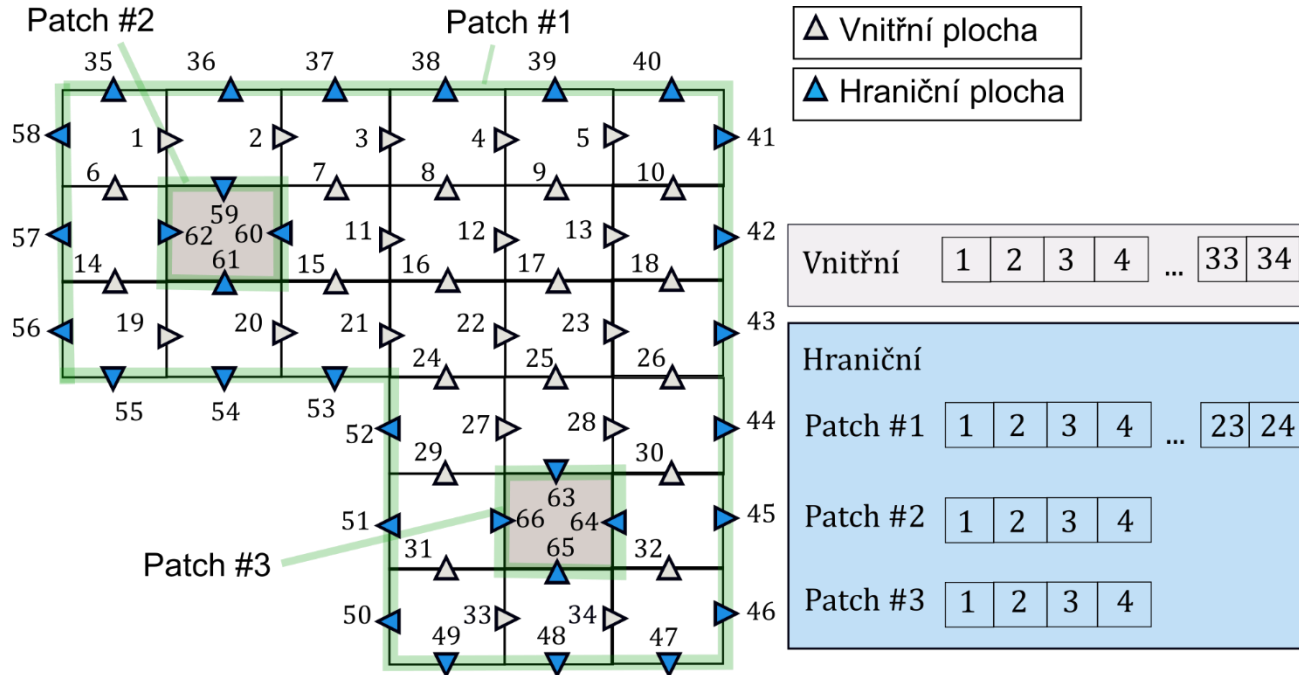
# Uspořádání sítě – plochy

- Označení jednotlivých ploch vzhledem k celé oblasti = **globální značení**.



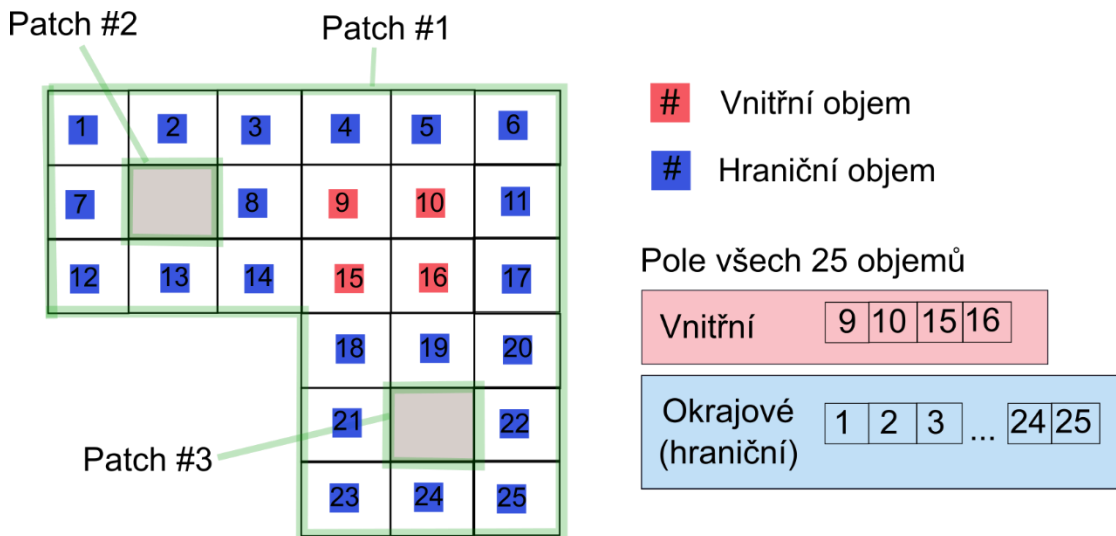
# Uspořádání sítě – plochy (2)

- Označení jednotlivých ploch vzhledem k příslušné okrajové podmínce = **lokální značení**.



# Uspořádání sítě – objemy

- Značení objemů vzhledem k jednotlivým okrajovým podmínkám, ale i obecněji na vnitřní a hraniční (okrajové podmínky), pro které objem nemusí mít sousední objemy na všech stranách.
- **Většinou** se však používá **globální značení**.

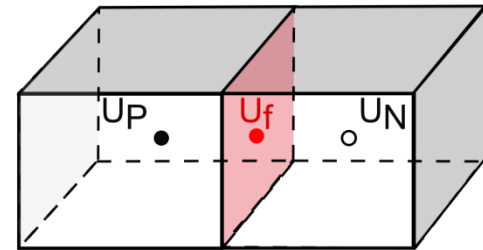
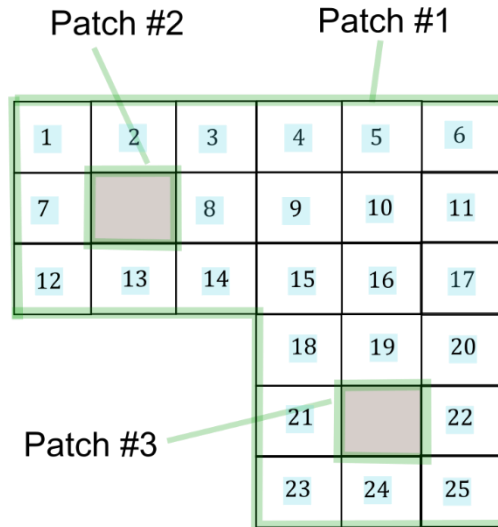


# Konektivita sítě – objemy

- Konektivita objemů (buněk) je nutná pro převod lokální formulace na globální formulaci (matice soustavy), která se používá pro konečné řešení problému.
- **Každý objem** („vlastník“) musí být **formulován ve smyslu jeho sousedních objemů, ohraničujících ploch a definujících uzlů.**

# Objem

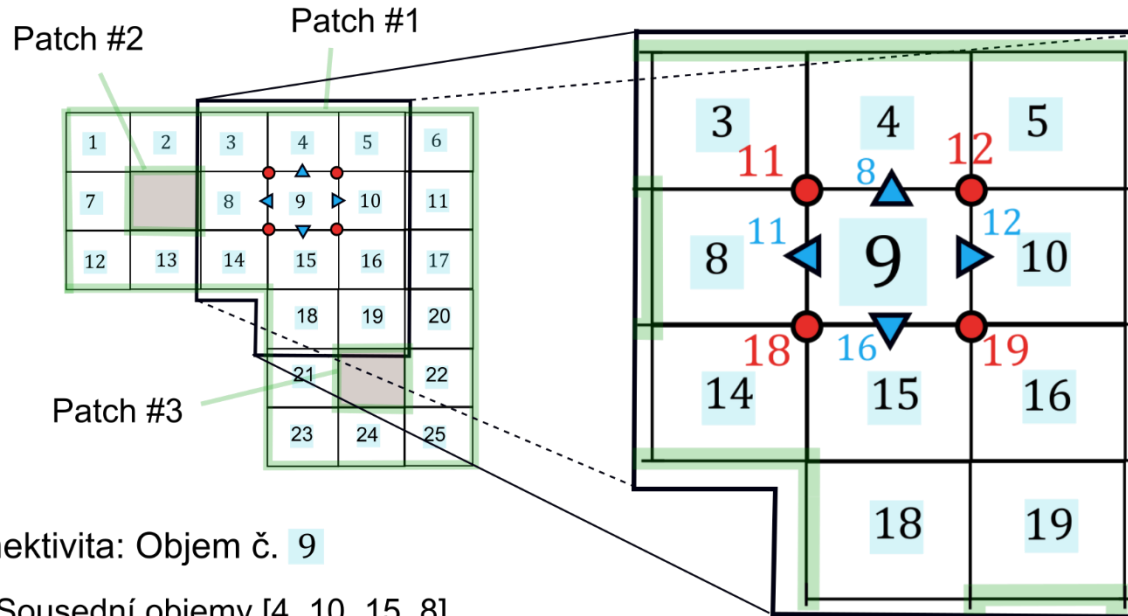
Celkem  
objemů  
= 25



Vlastník  
(Owner)

Soused  
(Neighbour)

# Konektivita sítě – objemy (2)

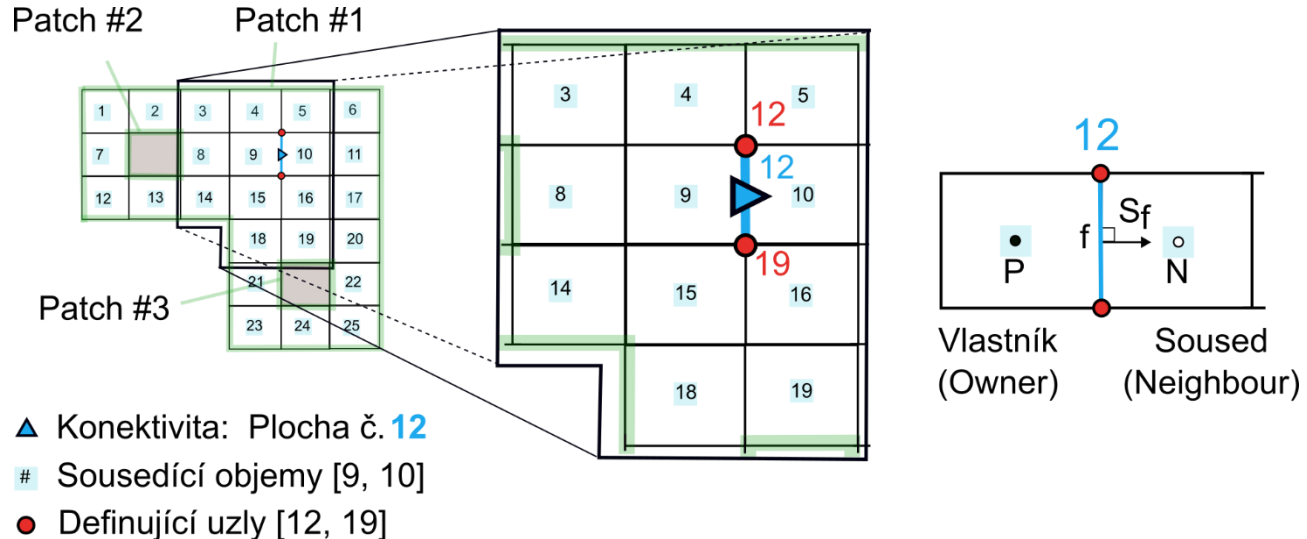


Konektivita: Objem č. 9

- # Sousední objemy [4, 10, 15, 8]
- ▲ Ohraničující plochy [8, 12, 16, 11]
- Definující uzly [12, 19, 18, 11]

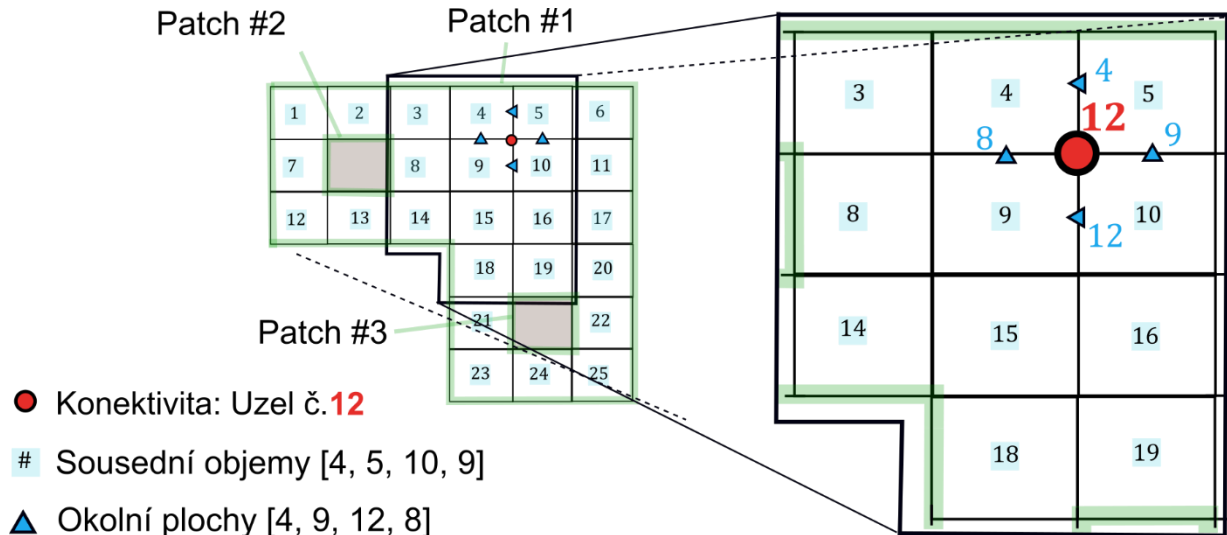
# Konektivita sítě – plochy

- Využití především pro **určení toků bilancovaných veličin na hranicích objemů**.
- Každou plochy obvykle sdílí pouze 2 objemy, tj. na každé straně plochy je 1 objem.
- Existují výjimky, kdy 2 objemy sdílí více než 1 plochu.



# Konektivita sítě – uzly

- Využívá se především **pro vizualizaci a interpretaci dat** (post-processing) a v některých případech také **pro výpočet gradientů** (Green-Gauss Node Based).
- Ve 2D pro čtyřúhelníkové objemy platí, že daný uzel je sdílen 4 objemy a 4 plochami, ve 3D a pro obecný typ elementu toto neplatí.



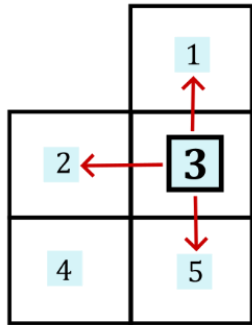
# Řešení diskretizovaných rovnic

# Převod lokální formulace na globální

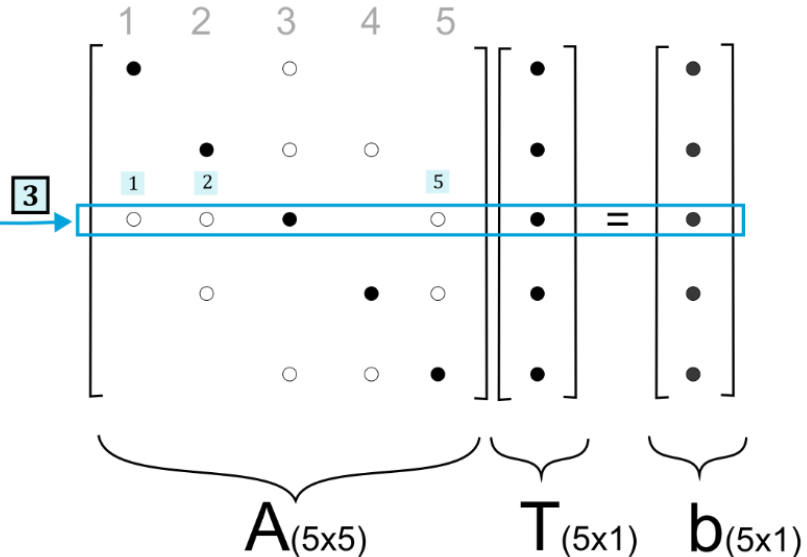
$$a_P \phi_P + \sum_{nb=1}^N a_{nb} \phi_{nb} = b_P$$

Lokální formulace:  $a_P T_P + a_{nb1} T_1 + a_{nb2} T_2 + a_{nb3} T_3 = b_P$

Globální formulace:  $a_{33} T_3 + a_{31} T_1 + a_{32} T_2 + a_{35} T_5 = b_3$



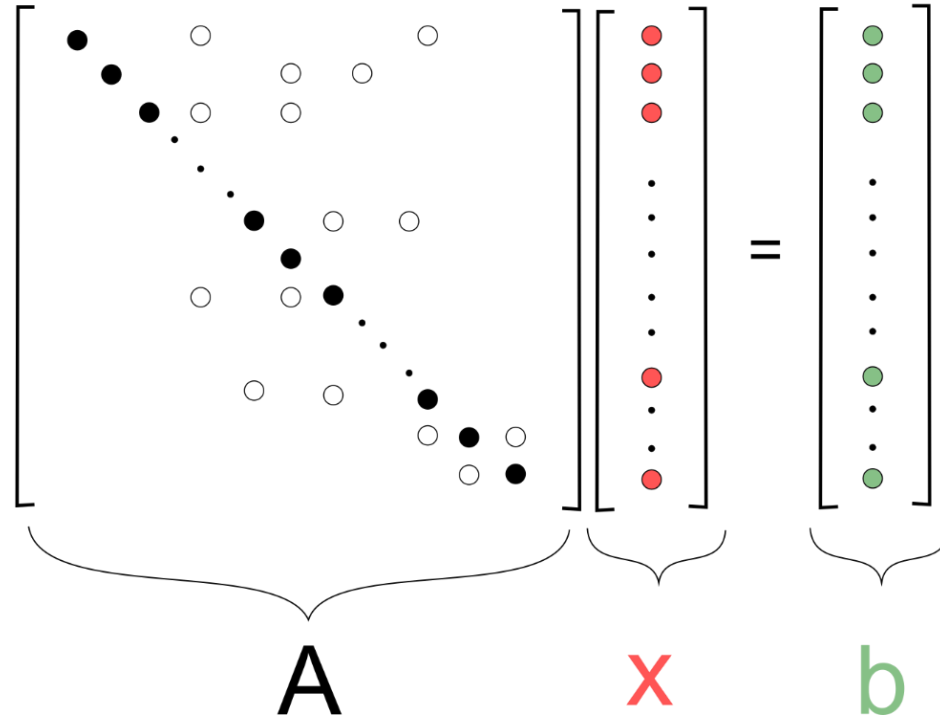
Objem č. 3  
↓  
Sousední objemy  
[1 2 5]



## Maticový zápis soustavy rovnic

$$Ax = b$$

- Diagonální koeficient
- Miodiagonální koeficient
- Neznámá veličina
- Zdrojový člen



# Diskretizace rovnic

- Převod soustavy PDR na soustavu algebraických rovnic.
- **1 objem = 1 algebraická rovnice pro každou neznámou veličinu (p, T, u, v, w, ... ).**
- Algebraické rovnice jsou sestaveny do maticového zápisu.

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + Q$$



$$a_P\phi_P + \sum_{nb=1}^N a_{nb}\phi_{nb} = b_P$$



$$A\phi = b$$

## Diskretizace rovnic – příklad

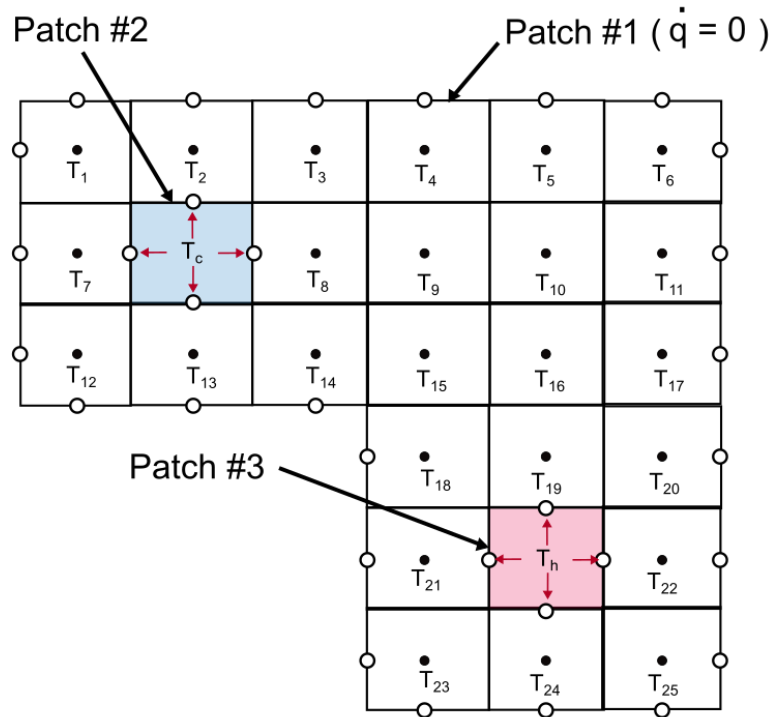
$$\mathbf{AT} = \mathbf{b} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \quad (2)$$

- Neznámou je v tomto případě teplota  $\mathbf{T}$  uložena ve středu každého objemu.
- Okrajové podmínky pro  $\mathbf{T}$  musí být specifikovány a jsou obsaženy ve vektoru  $\mathbf{b}$ .
- Výsledkem je skalární pole teploty (obecně musí být odvozeno pole pro každou z řešených fyzikálních veličin).

## Diskretizace rovnic – příklad (2)

- 2D, stacionární energetická rovnice s konstantním zdrojem tepla bez uvažování proudění, tj.  $v = 0$  m/s (rovnice vedení tepla v tuhých látkách).



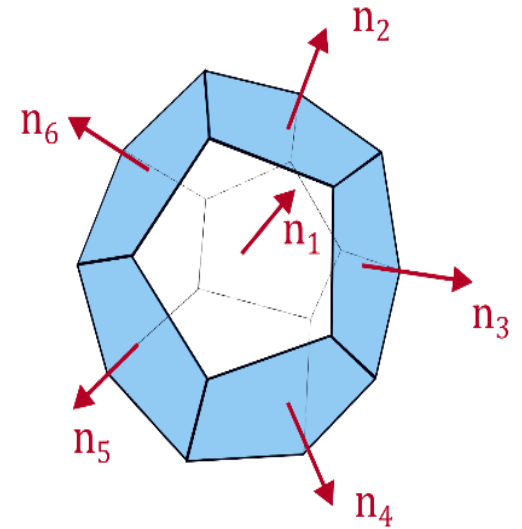
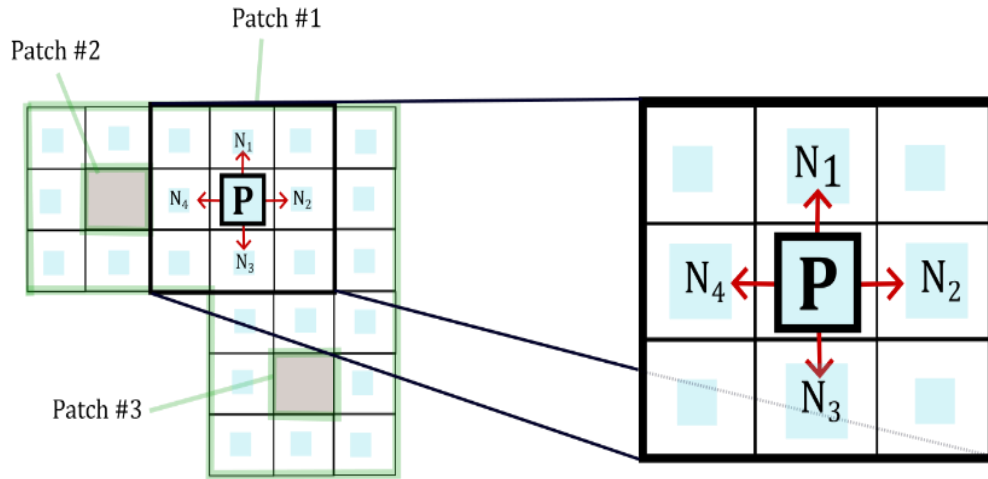
- Hraniční objem (Boundary)

- Vnitřní objem (Interior)

$$a_P \phi_P + \sum_{nb=1}^N a_{nb} \phi_{nb} = b_P$$

$$-\nabla \cdot (k \nabla T) = \dot{q}$$

## Diskretizace rovnic – příklad (3)



## Diskretizace rovnic – příklad (4)

$$-\nabla \cdot (k\nabla T) = \dot{q} \quad (3)$$

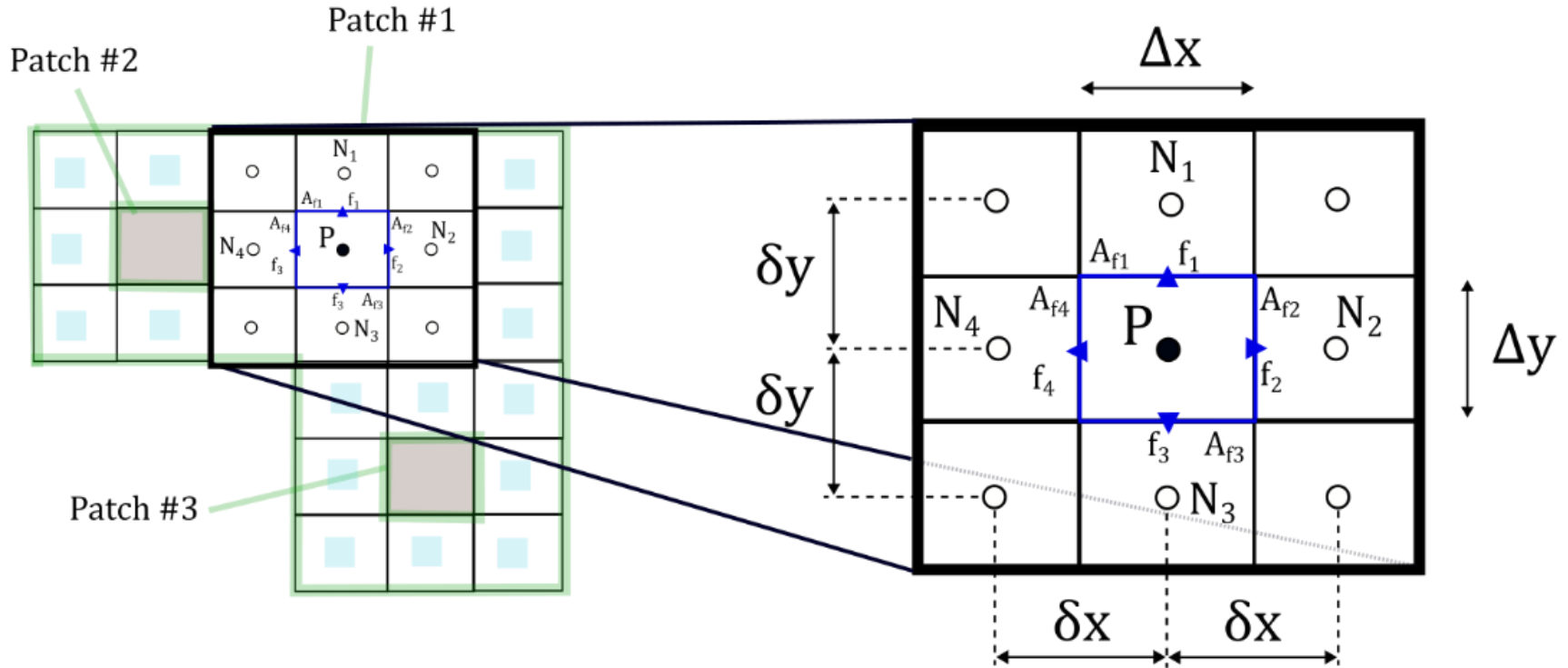
$$-\int_V \nabla \cdot (k\nabla T) dV = \int_V \dot{q} dV \quad (4)$$

$$-\int_A (k\nabla T) \cdot d\mathbf{A} = \dot{q}_P V_P \quad (5)$$

- Tato rovnice bilancuje energii pro objem P (lokální formulace).

$$-\sum_{fi=1}^{nf} (k\nabla T)_{fi} \cdot \mathbf{A}_{fi} = \dot{q}_P V_P \quad (6)$$

## Diskretizace rovnic – příklad (5)



## Diskretizace rovnic – příklad (6)

$$-\left[(k\nabla T)_{f_1} \cdot \mathbf{A}_{f_1} + (k\nabla T)_{f_2} \cdot \mathbf{A}_{f_2} + (k\nabla T)_{f_3} \cdot \mathbf{A}_{f_3} + (k\nabla T)_{f_4} \cdot \mathbf{A}_{f_4}\right] = \dot{q}_P V_P \quad (7)$$

- Například pro plochu  $f_2$  můžeme psát:

$$\mathbf{A}_{f_2} = \Delta y_{f_2} \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} \quad (8)$$

$$\delta x_{f_2} = x_{N2} - x_P \quad (9)$$

$$\nabla T_{f_2} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{f_2} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{f_2} \mathbf{j} \quad (10)$$

## Diskretizace rovnic – příklad (7)

- Po dosazení dostaneme:

$$\nabla T_{f2} \cdot \mathbf{A}_{f2} = \left( \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} \right)_{f2} \cdot (\Delta y_{f2} \mathbf{i} + 0 \mathbf{j}) = \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{f2} \Delta y_{f2} \quad (11)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{f2} = \frac{T_{N2} - T_P}{\delta x_{f2}} = \frac{T_{N2} - T_P}{x_{N2} - x_P} \quad (12)$$

$$\nabla T_{f2} \cdot \mathbf{A}_{f2} = \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{f2} \Delta y_{f2} = \frac{T_{N2} - T_P}{\delta x_{f2}} \Delta y_{f2} \quad (13)$$

## Diskretizace rovnic – příklad (8)

$$-(k\nabla T)_{f2} \cdot \mathbf{A}_{f2} = a_{N2}(T_{N2} - T_P) \quad (14)$$

$$a_{N2} = -k \frac{\Delta y_{f2}}{\delta x_{f2}} \quad (15)$$

- Analogicky odvodíme koeficienty také pro zbývající 3 sousední objemy:

$$a_{N1} = -k \frac{\Delta x_{f1}}{\delta y_{f1}} \quad a_{N3} = -k \frac{\Delta x_{f3}}{\delta y_{f3}} \quad a_{N4} = -k \frac{\Delta x_{f4}}{\delta y_{f4}} \quad (16)$$

## Diskretizace rovnic – příklad (9)

- Dosazením odvozených koeficientů do (7) dostaneme:

$$-\left[(k\nabla T)_{f1} \cdot \mathbf{A}_{f1} + (k\nabla T)_{f2} \cdot \mathbf{A}_{f2} + (k\nabla T)_{f3} \cdot \mathbf{A}_{f3} + (k\nabla T)_{f4} \cdot \mathbf{A}_{f4}\right] = \dot{q}_P V_P \quad (7)$$

$$-\sum_{fi=1}^{nf} (k\nabla T)_{fi} \cdot \mathbf{A}_{fi} = \sum_{i=1}^{NB} a_{Ni} (T_{Ni} - T_P) = \dot{q}_P V_P \quad (17)$$

$$-(a_{N1} + a_{N2} + a_{N3} + a_{N4})T_P + a_{N1}T_{N1} + a_{N2}T_{N2} + a_{N3}T_{N3} + a_{N4}T_{N4} = \dot{q}_P V_P \quad (18)$$

## Diskretizace rovnic – příklad (10)

- V uceleném tvaru lze tedy napsat:

$$a_P T_P + \sum_{i=1}^{NB} a_{Ni} T_{Ni} = b_P \quad (19)$$

$$a_P = -\sum_{i=1}^{NB} a_{Ni} = -(a_{N1} + a_{N2} + a_{N3} + a_{N4}) \quad b_P = \dot{q}_P V_P \quad (20)$$

- Rovnice podobné vztahu (19) mohou být odvozeny pro všechny konečné objemy sítě, což vede na soustavu algebraických rovnic. Ta může být řešena běžně dostupnými matematickými metodami.
- Obecně můžou být odvozeny podobné rovnice také pro ostatní veličiny ( $p, u, v, w, k, \dots$ ).

## Diskretizace rovnic – příklad (11)

- Uvedená rovnice je odvozena v lokální formulaci.

$$-(a_{N1} + a_{N2} + a_{N3} + a_{N4})T_P + a_{N1}T_{N1} + a_{N2}T_{N2} + a_{N3}T_{N3} + a_{N4}T_{N4} = \dot{q}_P V_P \quad (21)$$

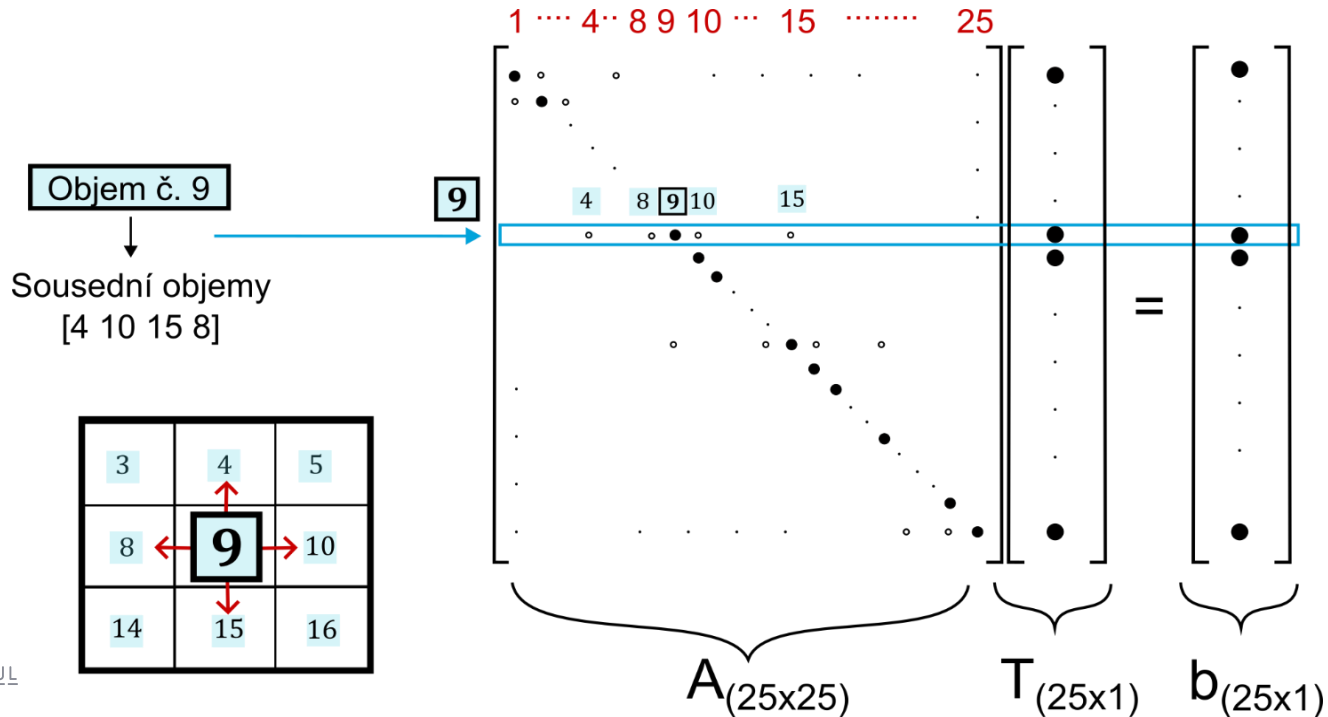
- Pro sestavení maticového tvaru soustavy potřebujeme každou rovnici v lokální formulaci převést na globální formulaci, tedy pro konečný objem č. 9 dostáváme:

$$a_9 T_9 + a_{N4} T_{N4} + a_{N10} T_{N10} + a_{N15} T_{N15} + a_{N8} T_{N8} = \dot{q}_9 V_9 \quad (22)$$

$$\mathbf{AT} = \mathbf{b} \quad (23)$$

## Diskretizace rovnic – příklad (12)

$$a_9 T_9 + a_{N4} T_{N4} + a_{N10} T_{N10} + a_{N15} T_{N15} + a_{N8} T_{N8} = \dot{q}_9 V_9 \quad (24)$$



# Řešení diskretizovaných rovnic

- Diskretizace převádí PDR na soustavu disktrétních algebraických rovnic.
- Pro získání neznámých veličin ( $T$ ,  $p$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , ...), je tyto rovnice nezbytné řešit.
- Techniky řešení systému rovnic jsou nezávislé na použité metodě diskretizace.
  
- *Metody řešení systémů lineárních algebraických rovnic se obecně dělí na:*
  - **Přímé metody** (Gaussova eliminace, LU rozklad, ...)
  - **Iterativní metody** (Jacobi, Gauss-Seidel, Metoda sdružených gradientů, ...)

# Přímé metody

- Přímé metody využívají poměrně složitého algoritmu při řešení v porovnání s iteračními metodami.
- Nicméně tento algoritmus je většinou aplikován pouze jednou.
- Jako příklad můžeme uvažovat následující rovnici:

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (25)$$

- Řešení je zaručeno, pokud lze vypočítat  $\mathbf{A}^{-1}$  (jakýmkoliv způsobem).
- Pro reálné případy je velmi nepraktické počítat inverzní matici statisíce až miliony objemů.

## Přímé metody (2)

- Stávají se výpočetně více náročné jak roste počet výpočetních objemů.
- Vyžadují velké nároky na paměť PC.
- V jednoduchých případech je matice  $A$  řídká a pro strukturované sítě rovněž pásová.
- Ve speciálních případech je matice  $A$  navíc symetrická.
- V těchto případech se s výhodou využívají techniky pro řešení takto specifických typů matic, což v mnoha případech urychluje řešení soustavy.

# Iterativní metody

- Využívají tzv. princip „**odhad-korekce**“, kdy dochází k postupnému zpřesňování výsledku opakovaným řešením rovnic.
- Například metody Jacobiho a Gauss-Seidelova.
- *Postup řešení:*
  - 1) **Počáteční odhad** diskretních hodnot T ve všech objemech sítě.
  - 2) **Procházení** všemi **objemy a aktualizace hodnot T** s využitím vztahu: 
$$T_P = \frac{-\sum_{i=1}^{NB} a_{Ni}T_{Ni} + b_P}{a_P} \tag{26}$$
  - 3) Průchod všemi objemy sítě tvoří 1 kompletní iteraci.
  - 4) **Kontrola dosažení konvergenčního kritéria** (Ano = konec výpočtu, Ne = návrat do bodu 1, 2).

## Iterativní metody (2)

- Pro libovolně velké koeficienty  $\mathbf{a}_p$  a  $\mathbf{a}_{Ni}$  není zaručena konvergence ke správnému řešení.
- **Scarboroughovo kritérium** musí být splněno.

$$\frac{-\sum_{i=1}^{NB} a_{Ni}}{a_p} \begin{cases} \leq 1 & \text{pro všechny členy} \\ < 1 & \text{pro alespoň 1 člen} \end{cases} \quad (27)$$

- Všechny matice, které splňují toto kritérium jsou tzv. **diagonálně dominantní**.
- G-S metoda může být použita s nízkými nároky na paměť, koeficienty matice jsou často počítány „za běhu“, protože v daný okamžik není pro výpočet celá matice potřeba.
- G-S metoda je zřídka používána v základní podobě pro rozsáhlé systémy rovnic z důvodu pomalé konvergence.

# Shrnutí přednášky

- **Diskretizace geometrie vs diskretizace rovnic**
- **Topologie a konektivita** výpočetní **sítě** (způsob uložení uzlů, ploch a objemů)
- **Řešení** diskretizovaných (algebraických) **rovnic**



# Děkuji za pozornost