



Metoda konečných objemů, diskretizace jednotlivých členů v N-S rovnicích

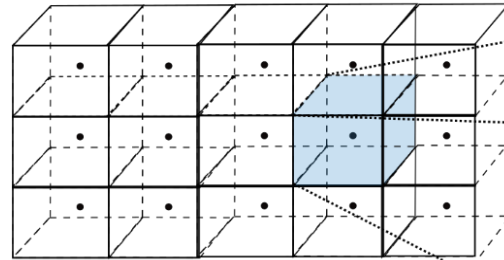
Obsah přednášky

- Princip metody konečných objemů (MKO) – opakování
- Způsoby diskretizace jednotlivých členů v N-S rovnicích
- Neortogonalita výpočetní sítě – způsoby řešení

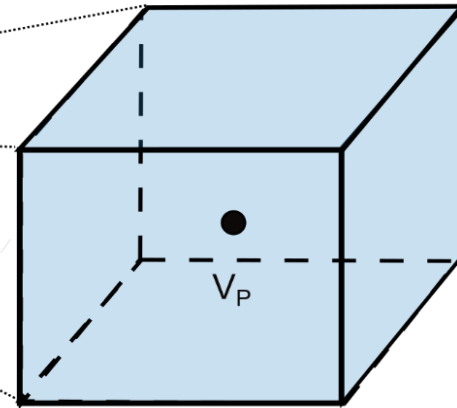
Princip metody konečných objemů (MKO) – opakování

Metoda konečných objemů

- Princip metody konečných objemů spočívá v rozdělení výpočetní oblasti na menší podoblasti, tzv. kontrolní objemy (KO).
- Integrace základních rovnic (pro popis proudění nebo přenosu tepla) přes daný kontrolní objem zajistí převedení soustavy PDR na soustavu algebraických rovnic, kde jsou hodnoty neznámých (p , u , v , w , T , ...) řešeny ve středech kontrolních objemů.



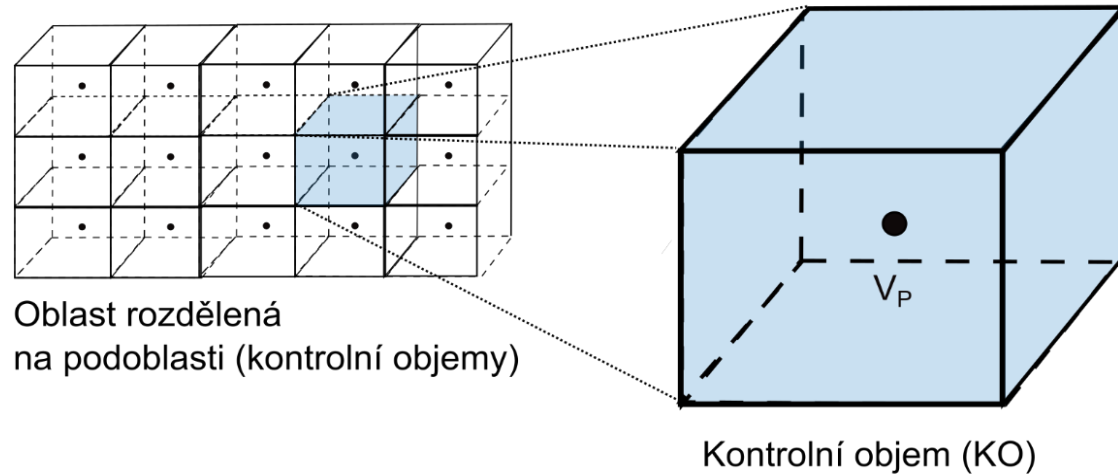
Oblast rozdělená
na podoblasti (kontrolní objemy)



Kontrolní objem (KO)

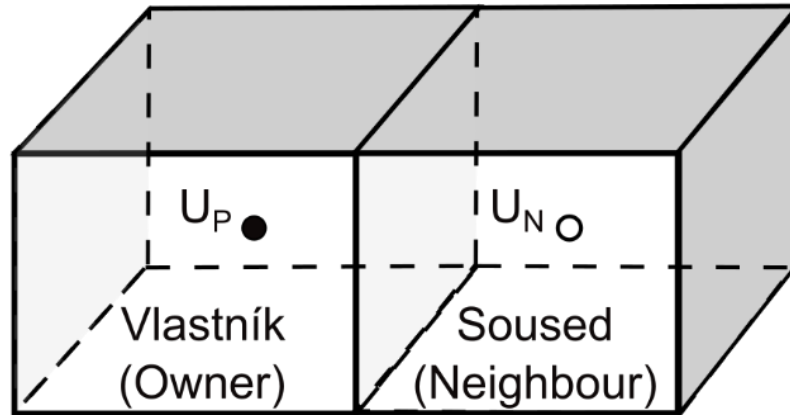
Metoda konečných objemů (2)

- Linearizace diskretizovaných rovnic a řešení soustavy těchto rovnic vede na aktualizaci hodnot neznámých veličin v každé iteraci.
- Velikost každého kontrolního objemu (V_p) je předem známa.



Metoda konečných objemů (3)

- Hodnoty neznámých (p , T , v , ...) se mění lineárně podél objemu (MKO 2. řádu).
- Hodnoty neznámých (p , T , v , ...) jsou obvykle uloženy ve středech objemů (P , N , ...).
- Každý kontrolní objem má “ M ” sousedních objemů, tj. “ M ” ohraničujících ploch.



Maticový zápis N-S rovnic

- N-S rovnice ve vektorovém tvaru:

$$\frac{\partial[\rho\mathbf{v}]}{\partial t} + \nabla \cdot \{\rho\mathbf{v}\mathbf{v}\} = -\nabla p + \nabla \cdot \{\boldsymbol{\tau}\} + [\rho\mathbf{g}] \quad (1)$$

- Člen vyjadřující tečné napětí vlivem viskozity pro Newtonovskou tekutinu:

$$\nabla \cdot \{\boldsymbol{\tau}\} = \nabla \cdot \left\{ \mu \{ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \right\} \quad (2)$$

- Pro algoritmus chceme mít N-S rovnice v maticové formě, např. pro složku x:

$$\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{B} \quad (3)$$

- M je matice koeficientů, B je vektor pravé strany (zdroje, OP).

Způsoby diskretizace jednotlivých členů v N-S rovnicích

Důležité členy v N-S rovnicích

- **Stacionární, nestlačitelné, vazké proudění** je popsáno následovně:

$$\nabla \cdot \{\rho \mathbf{v}\mathbf{v}\} = -\nabla p + \nabla \cdot \{\mu\{\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T\}\} + [\rho \mathbf{g}] \quad (4)$$

- Každý z těchto členů lze integrovat samostatně a tím využít různé techniky pro převedení do algebraické podoby.

$$\underbrace{\int_V [\nabla \cdot \{\rho \mathbf{v}\mathbf{v}\}] dV}_{\text{Konvektivní člen}} = - \underbrace{\int_V [\nabla p] dV}_{\text{Tlakový člen}} + \underbrace{\int_V \left[\nabla \cdot \left\{ \mu \{ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \} \right\} \right] dV}_{\text{Difúzní člen (vazké síly)}} + \underbrace{\int_V [\rho \mathbf{g}] dV}_{\text{Zdrojový člen (objemové síly)}} \quad (5)$$

**Konvektivní
člen**

**Tlakový
člen**

**Difúzní člen
(vazké síly)**

**Zdrojový člen
(objemové síly)**

Důležité členy v N-S rovnicích (2)

- **Stacionární, nestlačitelné, vazké proudění.**

$$\underbrace{\int_V [\nabla \cdot \{\rho \mathbf{v}\mathbf{v}\}] dV}_{\text{Konvektivní člen}} = - \underbrace{\int_V [\nabla p] dV}_{\text{Tlakový člen}} + \underbrace{\int_V \left[\nabla \cdot \left\{ \mu \{ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \} \right\} \right] dV}_{\text{Difúzní člen (vazké síly)}} + \underbrace{\int_V [\rho \mathbf{g}] dV}_{\text{Zdrojový člen (objemové síly)}} \quad (5)$$

- Pro nestlačitelné tekutiny je $\rho = \text{konst.}$

$$\int_V [\nabla \cdot \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}] dV = - \frac{1}{\rho} \int_V [\nabla p] dV + \int_V \left[\nabla \cdot \left\{ \nu \{ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \} \right\} \right] dV + \int_V [\mathbf{g}] dV \quad (6)$$

Zdrojový člen

- Zdrojový člen může být:
 1. **Konstantní** ($g = \text{konst.}$)
 2. **Lineární** ($g = f(v)$)
 3. **Nelineární**, členy vyšších řádů (kvadratické, kubické, ...)
- Konstantní zdroje jsou jednodušší na řešení a v maticovém tvaru se projeví na pravé straně (vektor **B**).

$$\mathbf{Mu} = \mathbf{B} \quad (7)$$

- Lineární a nelineární zdrojové členy vyžadují odlišné ošetření a obecně dělají řešení složitější.

Zdrojový člen (2)

- Konstantní člen může být například gravitační zrychlení:

$$\int_V [\mathbf{g}]dV = \mathbf{g}V_P \quad (8)$$

- V_p je objem buňky P.
- Lineární člen $S\mathbf{v}$, kde S je skalár, může být vyjádřen následovně:

$$\int_V [S\mathbf{v}]dV = S_P \int_V \mathbf{v}dV = S_P \int_V [\mathbf{v}_P + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \cdot \{\nabla\mathbf{v}_P\}]dV \quad (9)$$

$$\int_V [S\mathbf{v}]dV = S_P\mathbf{v}_P \int_V dV + \{\nabla\mathbf{v}_P\} \cdot \int_V ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_P))dV = S_P \mathbf{v}_P V_P \quad (10)$$

Zdrojový člen (2)

- Konstantní člen může být například gravitační zrychlení:

$$\int_V [\mathbf{g}]dV = \mathbf{g}V_P \quad (8)$$

- V_p je objem buňky P.
- Lineární člen $S\mathbf{v}$, kde S je skalár, může být vyjádřen následovně:

$$\int_V [S\mathbf{v}]dV = S_P \int_V \mathbf{v}dV = S_P \int_V [\mathbf{v}_P + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \cdot \{\nabla \mathbf{v}_P\}]dV \quad (9)$$

$$\int_V [S\mathbf{v}]dV = S_P \mathbf{v}_P \int_V dV + \underbrace{\{\nabla \mathbf{v}_P\} \cdot \int_V ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_P))dV}_{= 0 \text{ (pro } \mathbf{x}_P \text{ v těžišti objemu)}} = S_P \mathbf{v}_P V_P \quad (10)$$

Zdrojový člen (3)

- Máme 2 možnosti, jak řešit lineární zdrojový člen.

$$\int_V [\mathbf{S}\mathbf{v}]dV = S_P \mathbf{v}_P V_P \quad (11)$$

- Zprvė můžeme tento celý člen přidat na pravou stranu rovnice (vektor **B**) – **explicitní** řešení.
- Nebo můžeme přidat část $(-SPVP)$ k matici **M** – **implicitní** řešení.
- Implicitní řešení zvyšuje diagonální dominanci matice **M**, tedy i celého systému.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -S_1 V_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -S_2 V_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & -S_3 V_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -S_M V_M \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} S_1 u_1 V_1 \\ S_2 u_2 V_2 \\ S_3 u_3 V_3 \\ \vdots \\ S_M u_M V_M \end{pmatrix} \quad (13)$$

Zdrojový člen (4)

- Nelineární zdrojové členy používají **kombinované řešení** (implicitně-explicitní).

$$S\mathbf{v}^2 \quad (14)$$

- Vztah (14) můžeme rozepsat jako:

$$(S\mathbf{v}^{i-1})\mathbf{v} \quad (15)$$

- Pak dostaneme:

$$\int_V [S\mathbf{v}^2]dV = S_P\mathbf{v}_P^{i-1}\mathbf{v}_P V_P \quad (16)$$

- **Pro linearizaci** využíváme hodnot rychlosti z předešlé iterace $\mathbf{v}_p^{(i-1)}$.

Konvektivní a difúzní člen

- Oba tyto členy obsahují operátor nabra (∇ nebo $\nabla\cdot$).

$$\underbrace{\int_V [\nabla \cdot \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}]dV}_{\text{Konvektivní člen}} = -\frac{1}{\rho} \int_V [\nabla p]dV + \underbrace{\int_V [\nabla \cdot \{v\nabla\mathbf{v}\}]dV}_{\text{Difúzní člen}} + \int_V [g]dV \quad (17)$$

Konvektivní člen

Difúzní člen

- Potřebujeme převést objemové integrály na plošné integrály.
- Věta o divergenci** (Gauss-Ostrogradsky):

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}dS \quad (18)$$

Konvektivní člen

$$\underbrace{\int_V [\nabla \cdot \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}]dV}_{\text{Konvektivní člen}} = -\frac{1}{\rho} \int_V [\nabla p]dV + \underbrace{\int_V [\nabla \cdot \{\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}\}]dV}_{\text{Difúzní člen}} + \int_V [g]dV \quad (19)$$

- Aplikace věty o divergenci:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}dS \quad \longrightarrow \quad \int_V [\nabla \cdot \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}]dV = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dS \quad (20)$$

- Rychlost vně závorek ve vztahu (20) je neznámou, kterou hledáme.

Konvektivní člen

$$\underbrace{\int_V [\nabla \cdot \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}]dV}_{\text{Konvektivní člen}} = -\frac{1}{\rho} \int_V [\nabla p]dV + \underbrace{\int_V [\nabla \cdot \{\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}\}]dV}_{\text{Difúzní člen}} + \int_V [g]dV \quad (19)$$

- Aplikace věty o divergenci:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}dS \quad \longrightarrow \quad \int_V [\nabla \cdot \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}]dV = \int_S \underbrace{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})}_{\text{Tok plochou } dS}dS \quad (20)$$

- Rychlost vně závorek ve vztahu (20) je neznámou, kterou hledáme.
- Objemový tok plochou dS je:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dS \quad (21)$$

Konvektivní člen (2)

- Dalším krokem je převedení integrálu na sumu jednotlivých ploch.

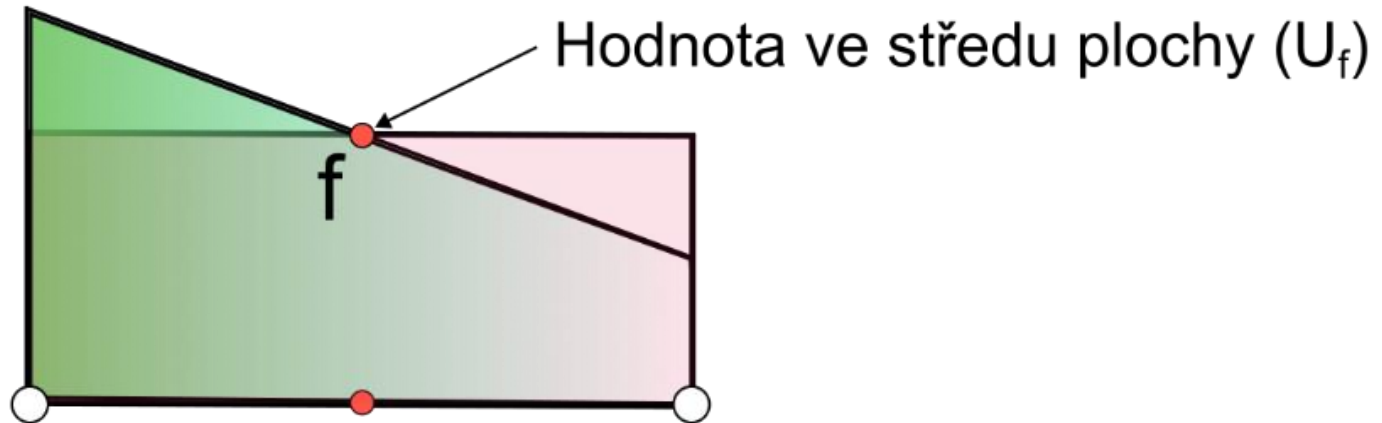
$$\int_S \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dS = \sum_{i=1}^M \int_{S_i} \mathbf{v}_i(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i)dS_i \quad (22)$$

- M je počet sousedních objemů / počet ploch tvořící objem.
- Průběh jakékoliv veličiny je podél plochy **lineární** (MKO 2. řádu).
- Tedy můžeme použít pro výpočet **hodnotu veličiny uprostřed plochy (f)**.

$$\sum_{i=1}^M \int_{S_i} \mathbf{v}_i(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i)dS_i = \sum_{i=1}^M \mathbf{v}_{fi}(\mathbf{v}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi})S_{fi} \quad (23)$$

Konvektivní člen (2)

$$\sum_{i=1}^M \int_S \mathbf{v}_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i) dS_i = \sum_{i=1}^M \mathbf{v}_{fi} (\mathbf{v}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi}) S_{fi} \quad (23)$$

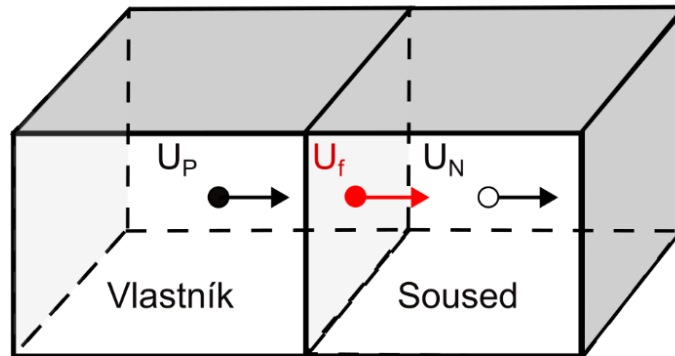


Konvektivní člen (3)

- MKO obvykle ukládá a počítá hodnoty neznámých veličiny ve středech objemů.

$$\sum_{i=1}^M \mathbf{v}_{fi} (\mathbf{v}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi}) S_i = \sum_{i=1}^M \mathbf{v}_{fi} F_{fi} \quad (24)$$

- Pro získání hodnot na hranicích objemů, tj. plochách, je nutné použít **interpolaci**.



Konvektivní člen (4)

- Výsledkem je, že matice koeficientů \mathbf{M} obsahuje diagonální a mimo-diagonální prvky.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \cdots & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_{32} & M_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_{MM} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Konvektivní člen (4)

- Výsledkem je, že matice koeficientů \mathbf{M} obsahuje diagonální a mimo-diagonální prvky.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & \cdots & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_{32} & M_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_{MM} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{[Cube]} \quad \text{[Tetrahedron]} \end{array} \quad (25)$$

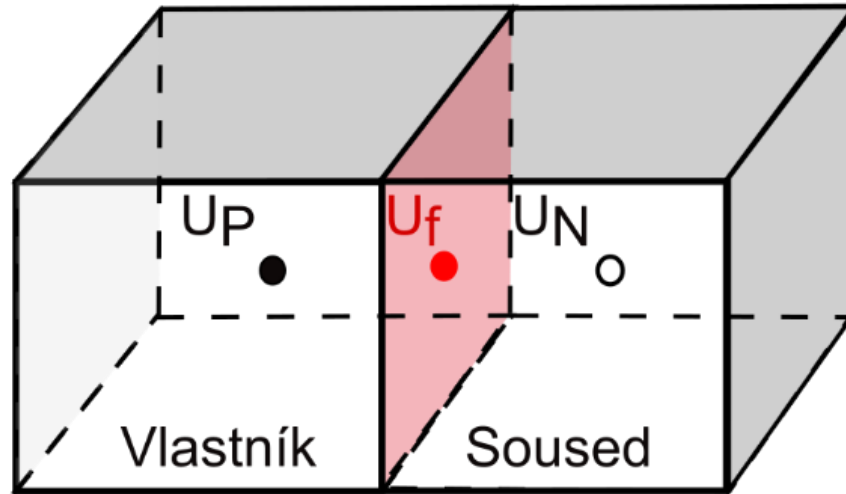
- Například ve 3D má šestistěnná buňka 1 diagonální člen a 6 mimo-diagonálních členů, čtyřstěnná buňka má 1 diagonální člen a 4 mimo-diagonální členy.

Diskretizační schémata konvektivních členů

- Pro získání hodnot na hranicích/plochách objemů existuje celá řada metod.
- Nejčastěji používaná schémata:
 1. **Protisměrné schéma 1. řádu** (1st Order Upwind)
 2. **Protisměrné schéma 2. řádu** (2nd Order Upwind)
 3. **Centrální schéma** (Central Differencing, lineární interpolace)
 4. **QUICK schéma** (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics)
- Uvedená schémata počítají **hodnotu na hranici 2 objemů pomocí hodnoty ve středu** aktuálního objemu (P) a hodnoty ve středu sousedního objemu (N).

Diskretizační schémata konvektivních členů (2)

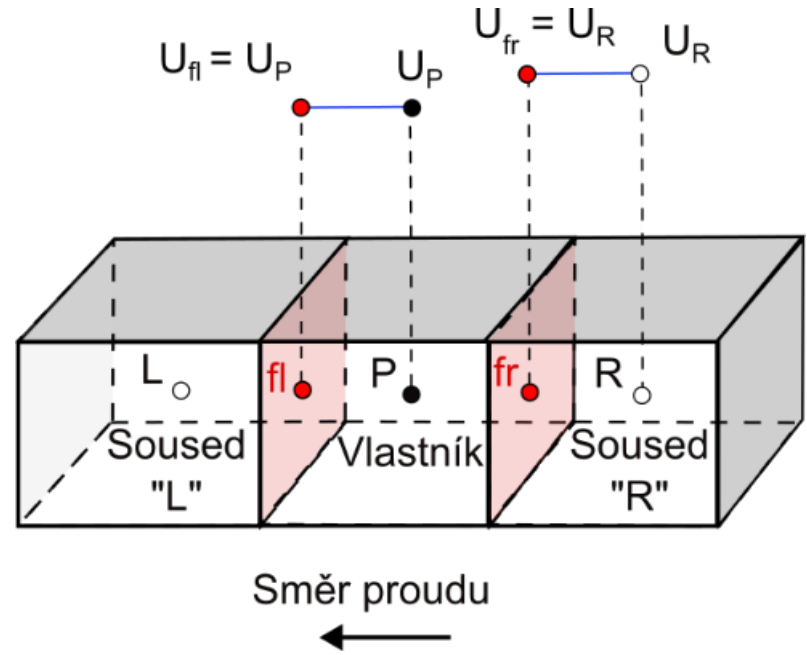
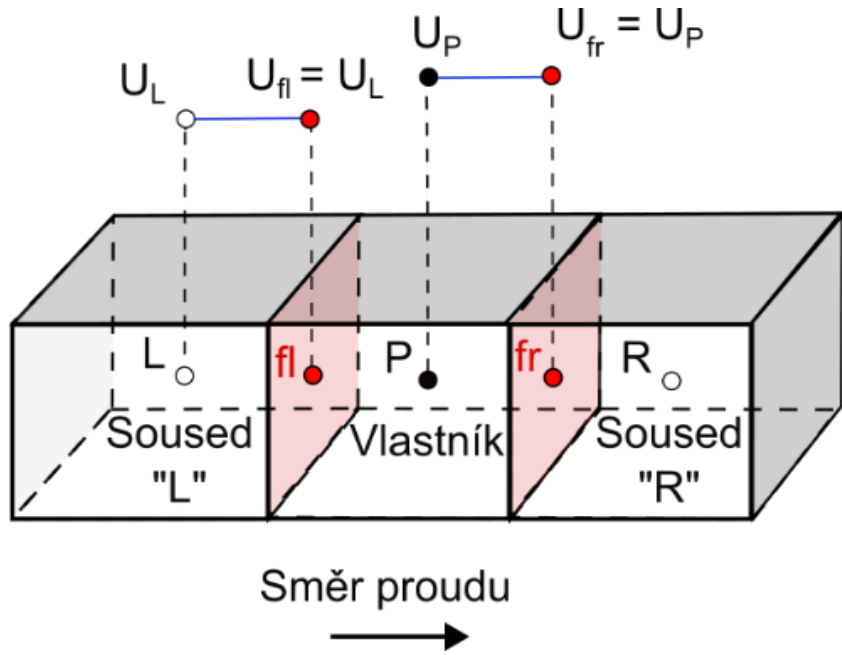
- Uvedená schémata počítají **hodnotu na hranici 2 objemů pomocí hodnoty ve středu** aktuálního objemu (P) a hodnoty ve středu sousedního objemu (N).



Protisměrné schéma 1. řádu (1st Order Upwind)

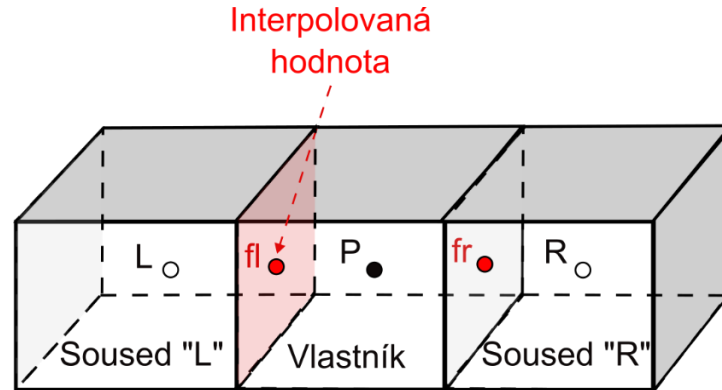
- Nejjednodušší diskretizační schéma, přesnost 1. řádu.
- Jednoduché na implementaci a stabilizuje výpočet.
- Silně difúzní, gradienty v proudovém poli jsou často rozmazané.
- Nejlepší schéma pro předběžné výpočty nebo výpočty se „špatnou“ sítí.

Protisměrné schéma 1. řádu (1st Order Upwind) (2)



Protisměrné schéma 1. řádu (1st Order Upwind) (3)

- Hodnota \mathbf{U} na hranici/ploše objemu (\mathbf{U}_f) je shodná s hodnotou ve středu objemu, který leží **PROTI PROUDU** (UPSTREAM) vzhledem k této ploše (**SMĚROVĚ ZÁVISLÉ SCHÉMA!**).



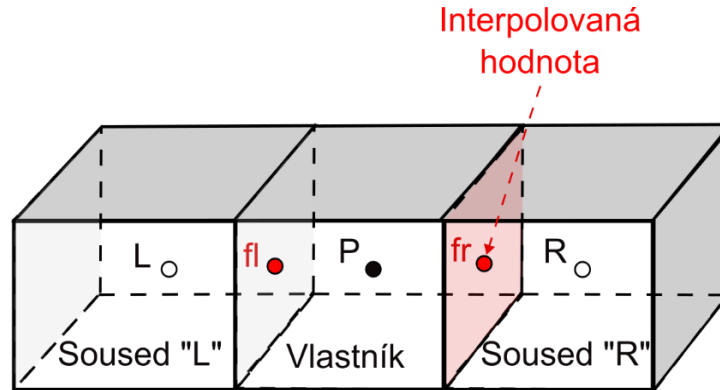
$$U_f = a_P U_P + a_L U_L + a_R U_R \quad (26)$$

$$\text{ZLEVA DOPRAVA: } a_P = 0; \quad a_L = 1; \quad a_R = 0; \quad U_f = U_L \quad (27)$$

$$\text{ZPRAVA DOLEVA: } a_P = 1; \quad a_L = 0; \quad a_R = 0; \quad U_f = U_P \quad (28)$$

Protisměrné schéma 1. řádu (1st Order Upwind) (4)

- Hodnota \mathbf{U} na hranici/ploše objemu (\mathbf{U}_f) je shodná s hodnotou ve středu objemu, který leží **PROTI PROUDU** (UPSTREAM) vzhledem k této ploše (**SMĚROVĚ ZÁVISLÉ SCHÉMA!**).



$$U_f = a_P U_P + a_L U_L + a_R U_R \quad (29)$$

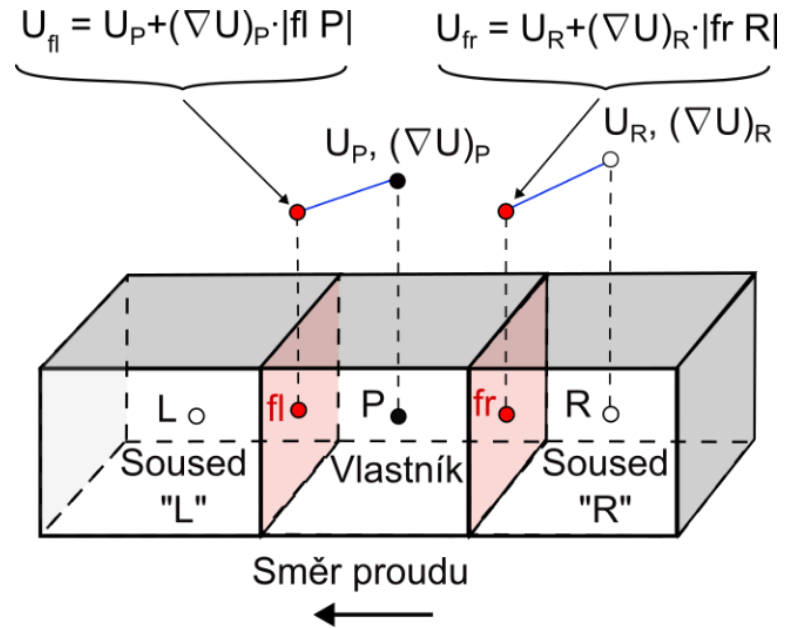
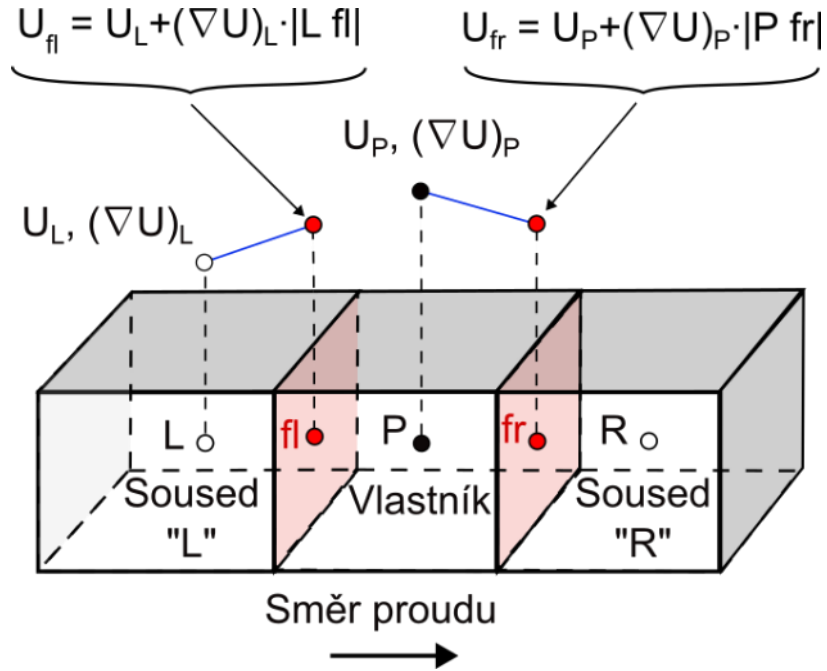
$$\text{ZLEVA DOPRAVA: } a_P = 1; \quad a_L = 0; \quad a_R = 0; \quad U_f = U_P \quad (30)$$

$$\text{ZPRAVA DOLEVA: } a_P = 0; \quad a_L = 0; \quad a_R = 1; \quad U_f = U_R \quad (31)$$

Protisměrné schéma 2. řádu (2nd Order Upwind)

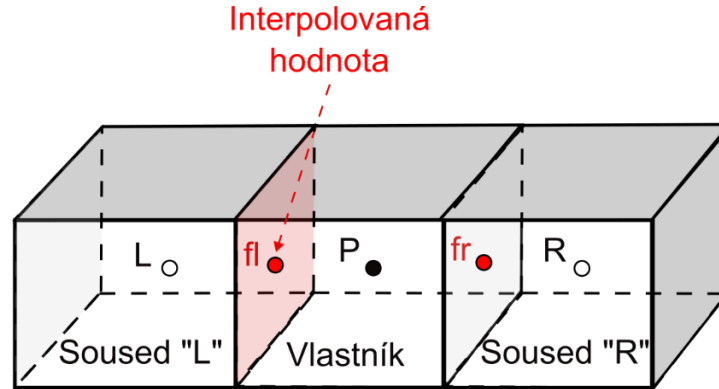
- Přesnější než schéma 1. řádu (rovněž **SMĚROVĚ ZÁVISLÉ SCHÉMA!**).
- V oblastech s velkými gradienty veličin může dávat hodnoty, které jsou mimo rozsah hodnot ve středech okolních buněk (aplikace tzv. omezovačů – limiterů).
- Oblíbené schéma, používá se jako kompromis mezi přesností a stabilitou.

Protisměrné schéma 2. řádu (2nd Order Upwind) (2)



Protisměrné schéma 2. řádu (2nd Order Upwind) (3)

- Hodnota \mathbf{U} na hranici objemu (\mathbf{U}_f) závisí na hodnotě a gradientu ve středu objemu, který leží **PROTI PROUDU** ($\mathbf{U}_P, \nabla \mathbf{U}_P$) vzhledem k této ploše (**SMĚROVĚ ZÁVISLÉ SCHÉMA!**).



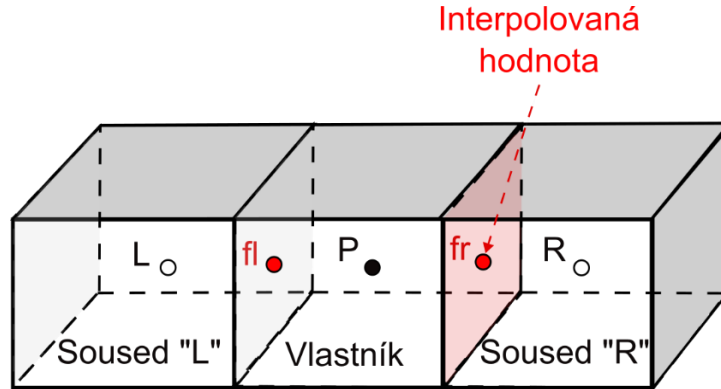
$$U_f = a_P U_P + a_L U_L + a_R U_R \quad (32)$$

$$\text{ZLEVA DOPRAVA: } a_P = 0; a_L = 1 + \frac{1}{U_L} (\nabla U)_L |L fl|; a_R = 0; U_f = U_L + (\nabla U)_L |L fl| \quad (33)$$

$$\text{ZPRAVA DOLEVA: } a_P = 1 + \frac{1}{U_P} (\nabla U)_P |fl P|; a_L = 0; a_R = 0; U_f = U_P + (\nabla U)_P |fl P| \quad (34)$$

Protisměrné schéma 2. řádu (2nd Order Upwind) (4)

- Hodnota \mathbf{U} na hranici objemu (\mathbf{U}_f) závisí na hodnotě a gradientu ve středu objemu, který leží **PROTI PROUDU** ($\mathbf{U}_P, \nabla \mathbf{U}_P$) vzhledem k této ploše (**SMĚROVĚ ZÁVISLÉ SCHÉMA!**).



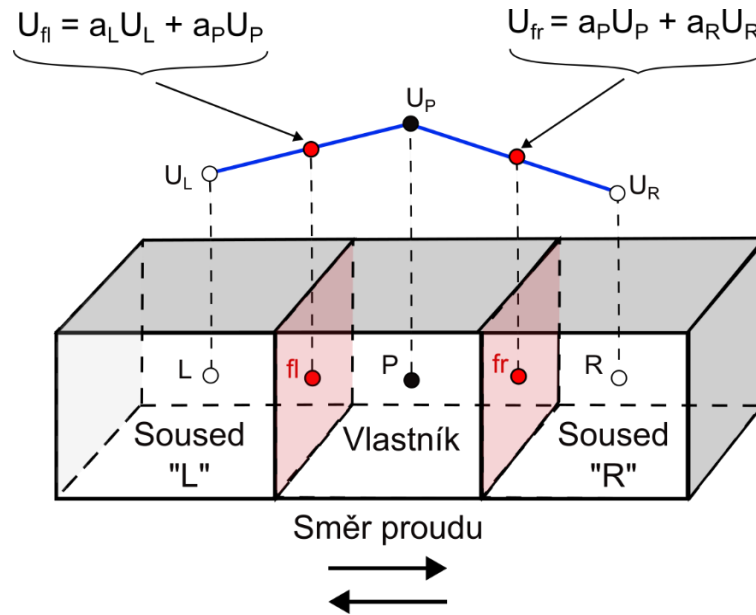
$$U_f = a_P U_P + a_L U_L + a_R U_R \quad (35)$$

$$\text{ZLEVA DOPRAVA: } a_P = 1 + \frac{1}{U_P} (\nabla U)_P |P \text{ fr}|; a_L = 0; a_R = 0; U_f = U_P + (\nabla U)_P |P \text{ fr}| \quad (36)$$

$$\text{ZPRAVA DOLEVA: } a_P = 0; a_L = 0; a_R = 1 + \frac{1}{U_R} (\nabla U)_R |\text{fr R}|; U_f = U_R + (\nabla U)_R |\text{fr R}| \quad (37)$$

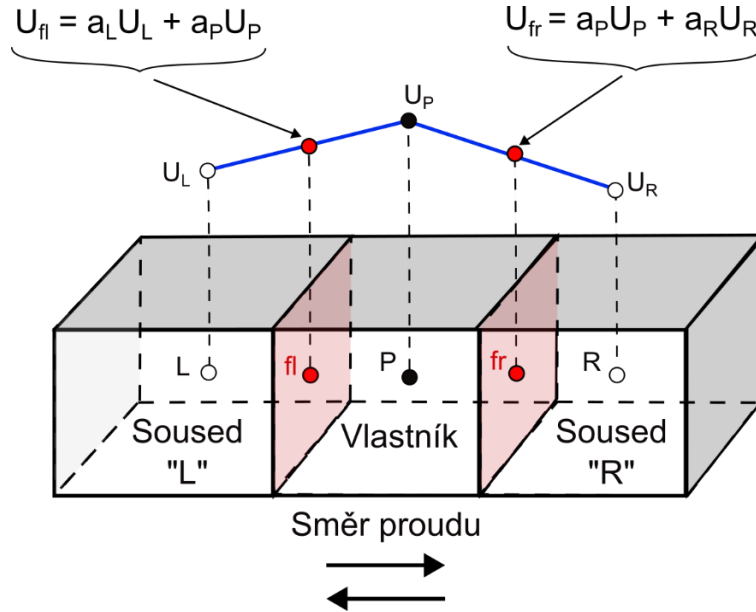
Centrální schéma (Central-Differencing)

- Přesnější než schéma 1. řádu (přesnost 2. řádu).
- Hodnota \mathbf{U} na hranici/ploše objemu (\mathbf{U}_f) je získána **lineární interpolací** hodnot ve středech objemů, které leží na obou stranách plochy (**SMĚROVĚ NEZÁVISLÉ SCHÉMA**).



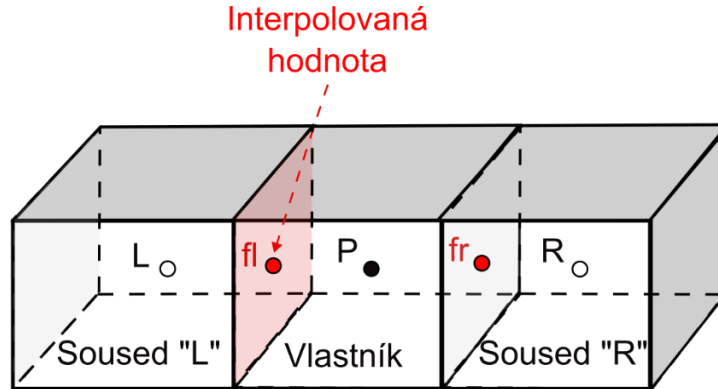
Centrální schéma (Central-Differencing) (2)

- Při řešení může vést k oscilacím až k divergenci, pokud je Pecletovo číslo větší než 2.
- Občas součástí tzv. Hybridního schéma, které umožňuje přepnout na schéma 1. řádu Upwind v případě, že je místní Pecletovo číslo větší než 2.



Centrální schéma (Central-Differencing) (3)

- Hodnota \mathbf{U} na hranici/ploše objemu (\mathbf{U}_f) je získána **lineární interpolací** ve středech objemů (\mathbf{U}_L and \mathbf{U}_P), které leží na obou stranách plochy (**SMĚROVĚ NEZÁVISLÉ SCHÉMA**).



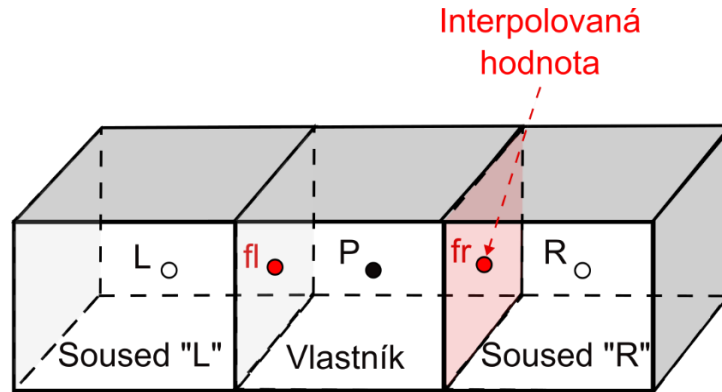
$$U_f = a_P U_P + a_L U_L + a_R U_R \quad (38)$$

$$a_P = \frac{|L fl|}{|L P|}; \quad a_L = \frac{|fl P|}{|L P|} = 1 - \frac{|L fl|}{|L P|}; \quad a_R = 0 \quad (39)$$

$$U_f = \frac{|L fl|}{|L P|} U_P + \left(1 - \frac{|L fl|}{|L P|}\right) U_L \quad (40)$$

Centrální schéma (Central-Differencing) (4)

- Hodnota \mathbf{U} na hranici/ploše objemu (\mathbf{U}_f) je získána **lineární interpolací** ve středech objemů (\mathbf{U}_L and \mathbf{U}_P), které leží na obou stranách plochy (**SMĚROVĚ NEZÁVISLÉ SCHÉMA**).



$$U_f = a_P U_P + a_L U_L + a_R U_R \quad (41)$$

$$a_P = \frac{|fr R|}{|P R|}; \quad a_L = 0; \quad a_R = \frac{|P fr|}{|P R|} = 1 - \frac{|fr R|}{|P R|} \quad (42)$$

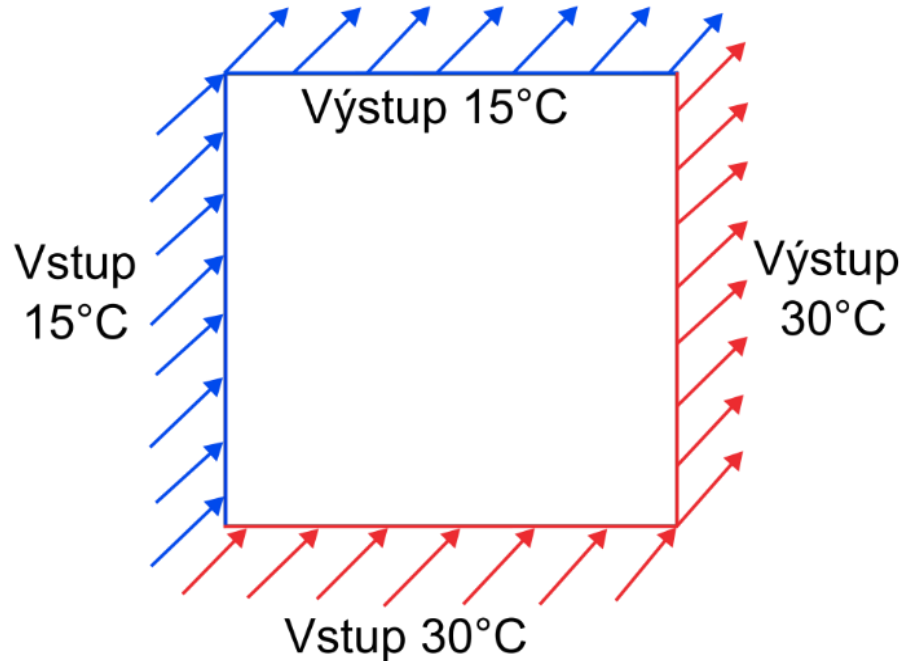
$$U_f = \frac{|fr R|}{|P R|} U_P + \left(1 - \frac{|fr R|}{|P R|}\right) U_R \quad (43)$$

Přesnost a falešná difúze

- Vždy se snažíme o kompromis mezi přesností a výpočetní a časovou náročností.
- Občas i méně přesné řešení může být přínosné, protože nám může ukázat důležité trendy v relativně krátkém čase.
- Často je méně přesné řešení použito jako odhad (inicializace) pro přesnější řešení.
- Uvažujme **dva rovnoběžné proudy vzduchu pohybující se stejnou rychlostí ale o různých teplotách pod úhlem 45° .**

Přesnost a falešná difúze (2)

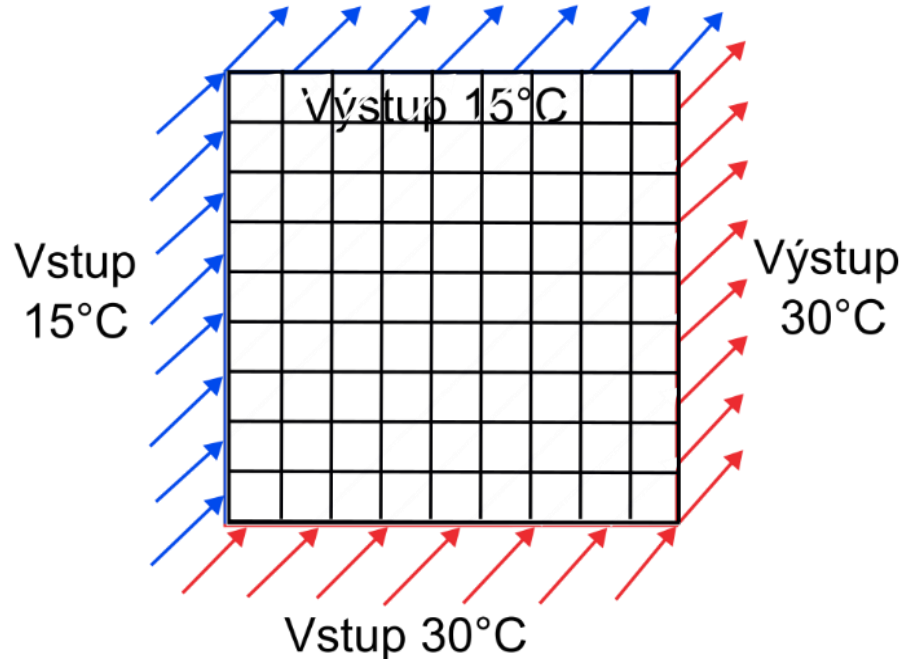
- Uvažujme dva rovnoběžné proudy vzduchu pohybující se stejnou rychlostí ale o různých teplotách pod úhlem 45°.



Přesnost a falešná difúze (3)

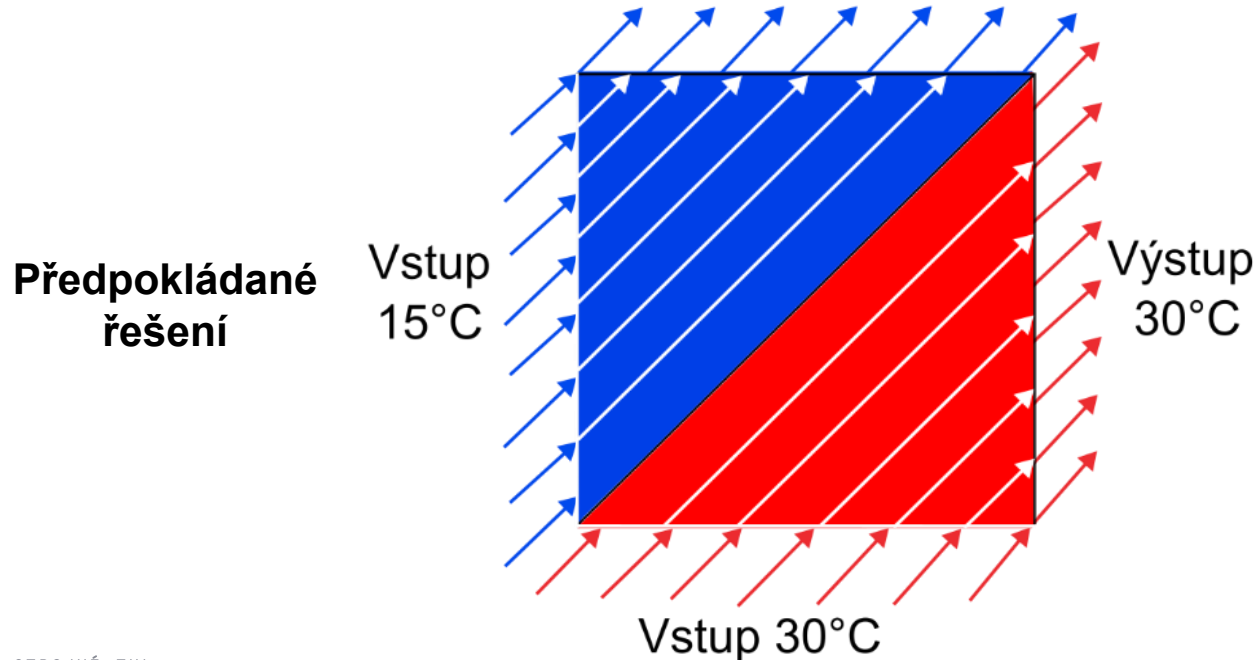
- Uvažujme dva rovnoběžné proudy vzduchu pohybující se stejnou rychlostí ale o různých teplotách pod úhlem 45° .

**Velmi hrubá
síť 9 x 9
(81 buněk)**

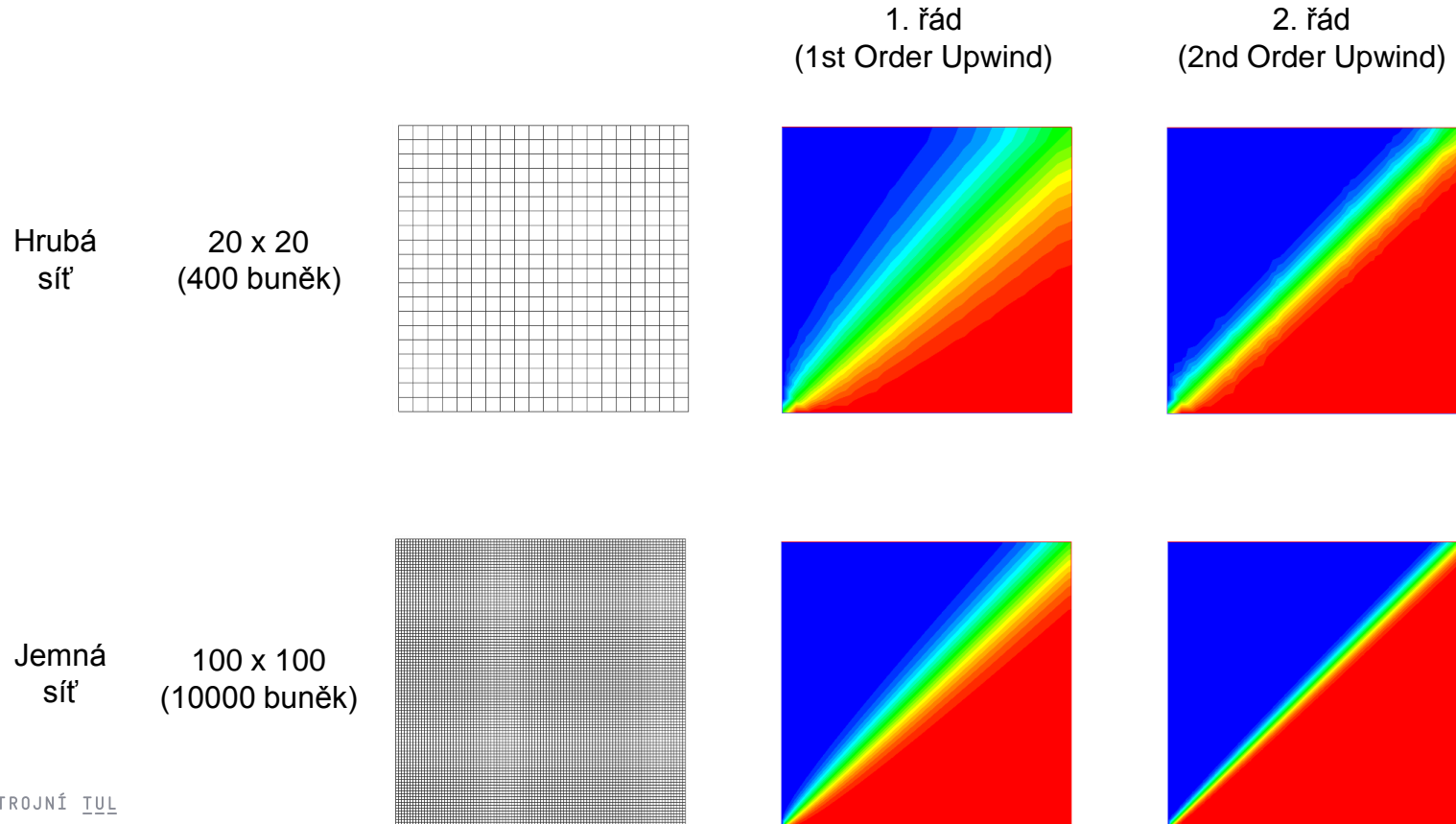


Přesnost a falešná difúze (4)

- Uvažujme dva rovnoběžné proudy vzduchu pohybující se stejnou rychlostí ale o různých teplotách pod úhlem 45° .



Přesnost a falešná difúze (5)



Difúzní člen

$$\underbrace{\int_V [\nabla \cdot \{\mathbf{v}\mathbf{v}\}]dV}_{\text{Konvektivní člen}} = -\frac{1}{\rho} \int_V [\nabla p]dV + \underbrace{\int_V [\nabla \cdot \{\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}\}]dV}_{\text{Difúzní člen}} + \int_V [g]dV \quad (44)$$

- Aplikace věty o divergenci:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}dS \quad \longrightarrow \quad \int_V [\nabla \cdot \{\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}\}]dV = \int_S [\{\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}\} \cdot \mathbf{n}]dS \quad (45)$$

- Jelikož je průběh veličin podél ploch lineární, můžeme aproximovat všechny veličiny jejich hodnotami ve středech těchto ploch (\mathbf{f}).

Difúzní člen (2)

$$\int_S [\{\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}\} \cdot \mathbf{n}] dS = \sum_{i=1}^M [v_{fi} \{\nabla\mathbf{v}\}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi}] S_{fi} \quad (46)$$

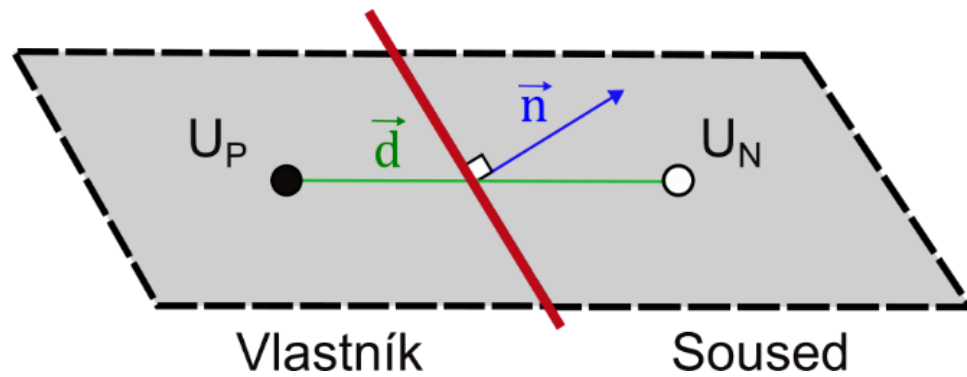
- Kinematická viskozita (v_{fi}) je určena na základě interpolace.

$$\sum_{i=1}^M [v_{fi} \{\nabla\mathbf{v}\}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi}] S_{fi} \quad (47)$$

- **Problém** při řešení **způsobuje skalární součin gradientu rychlosti a vektoru vnější normály** dané plochy.

$$\{\nabla\mathbf{v}\}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi} \quad (48)$$

Difúzní člen (3)



Difúzní člen (4)

- Ve speciálním případě, kdy je vektor vnější normály \mathbf{n} rovnoběžný s vektorem \mathbf{d} , může být tento součin vyjádřen jako:

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\mathbf{fi}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{fi}} = \frac{U_P - U_N}{|\mathbf{d}|} |\Delta| \quad (49)$$

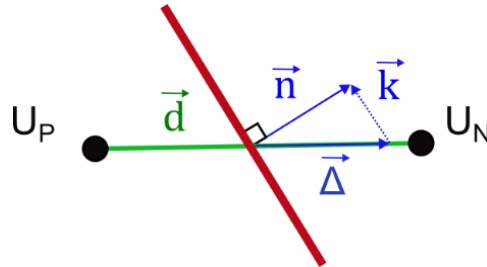
- **Obecně** toto ale bohužel **neplatí** a vektor vnější normály není rovnoběžný s vektorem \mathbf{d} (neortogonální síť).

Difúzní člen (5)

- Ve speciálním případě, kdy je vektor vnější normály \mathbf{n} rovnoběžný s vektorem \mathbf{d} , může být tento součin vyjádřen jako:

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\text{fi}} \cdot \mathbf{n}_{\text{fi}} = \frac{U_P - U_N}{|\mathbf{d}|} |\Delta| \quad (49)$$

- **Obecně** toto ale bohužel **neplatí** a vektor vnější normály není rovnoběžný s vektorem \mathbf{d} (neortogonální síť).
- Tyto případy jsou řešeny **rozložením vektoru vnější normály do 2 složek**.



Difúzní člen (6)

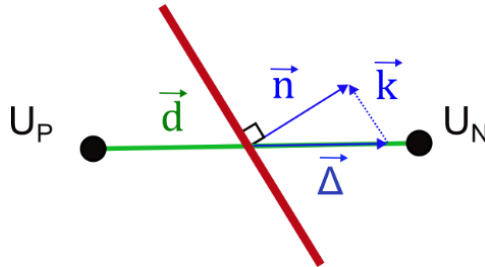
- Rozdělení vektoru vnější normály \mathbf{n} do 2 složek:

1. Ortogonální složka $\vec{\Delta}$

2. Neortogonální složka \vec{k}

$$\mathbf{n} = \Delta + \mathbf{k} \quad (\vec{\mathbf{n}} = \vec{\Delta} + \vec{\mathbf{k}}) \quad (50)$$

- Existuje nekonečně mnoho způsobů jak vektor vnější normály rozložit do složek.
- K rozkladu vektoru do složek se používá několik metod (Metoda pravoúhlého trojúhelníka – metoda minimální korekce, Rotační metoda, Přerelaxovaná metoda).



Difúzní člen (7)

- Nyní nahradíme $\mathbf{n} = \Delta + \mathbf{k}$ v difúzním členu.

$$\sum_{i=1}^M [v_{fi} \{\nabla \mathbf{v}\}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi}] S_{fi} = \sum_{i=1}^M [v_{fi} \{\nabla \mathbf{v}\}_{fi} \cdot [\Delta_{fi} + \mathbf{k}_{fi}]] S_{fi} \quad (51)$$

$$\sum_{i=1}^M [v_{fi} \{\nabla \mathbf{v}\}_{fi} \cdot \mathbf{n}_{fi}] S_{fi} = \underbrace{\sum_{i=1}^M [v_{fi} \{\nabla \mathbf{v}\}_{fi} \cdot \Delta_{fi}] S_{fi}}_{\substack{\text{Implicitní} \\ \text{(ortogonální) část}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^M [v_{fi} \{\nabla \mathbf{v}\}_{fi} \cdot \mathbf{k}_{fi}] S_{fi}}_{\substack{\text{Explicitní} \\ \text{(neortogonální) část}}} \quad (52)$$

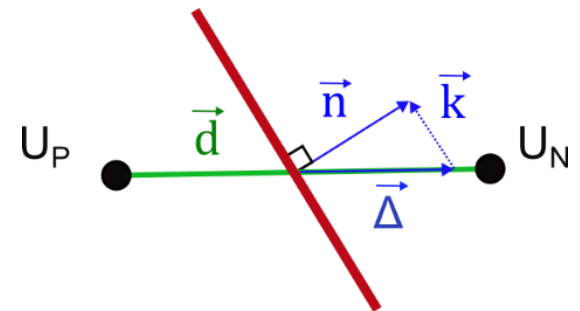
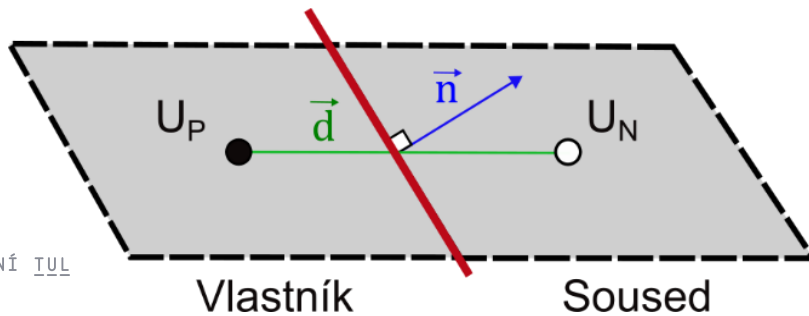
- Člen s ortogonální složkou je řešen **implicitně**, člen s neortogonální složkou je řešen **explicitně**.

Difúzní člen (8)

- **Ortogonalní člen** je řešen **implicitně**.

$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\mathbf{fi}} \cdot \Delta_{\mathbf{fi}} = \frac{U_P - U_N}{|d|} |\Delta_{\mathbf{fi}}| \quad (53)$$

- Velikost tohoto členu **určuje stabilitu systému rovnic**, jeho zvýšením zvyšujeme diagonální dominanci matice soustavy.

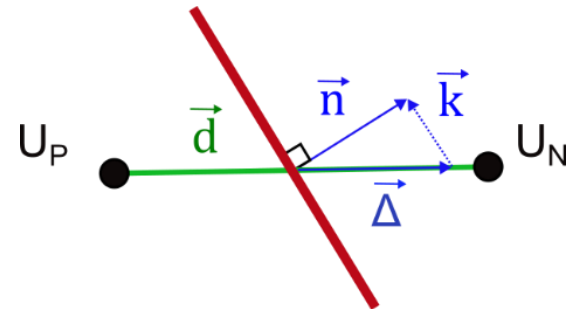
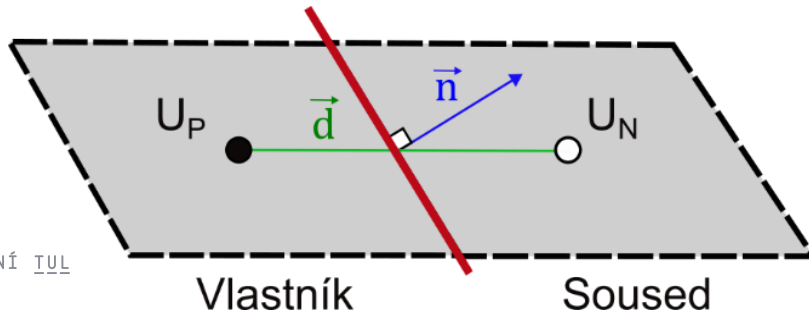


Difúzní člen (8)

- Neortogonální člen je řešen **explicitně**.

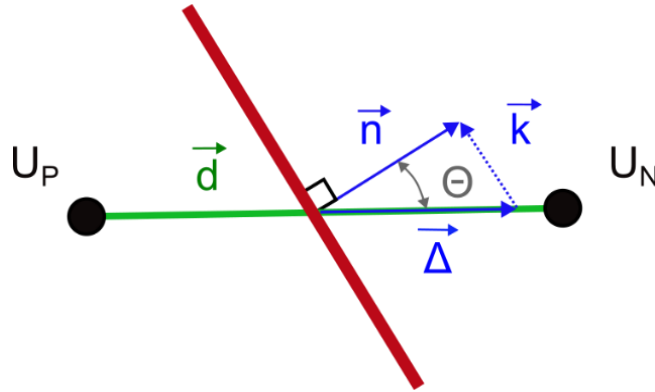
$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{fi} \cdot \mathbf{k}_{fi} < \gamma \frac{U_P - U_N}{|\mathbf{d}|} |\Delta_{fi}| \quad (54)$$

- Tento člen je řešen na základě známé rychlosti z předchozí iterace, plní tedy úlohu zdrojového členu.
- Tento člen **snižuje stabilitu systému rovnic**: čím je neortogonalita sítě větší, tím je vyšší explicitní člen (stabilitu lze zvýšit snížením γ , avšak za cenu ztráty přesnosti).



Difúzní člen (9)

- Úhel Θ mezi vektorem \vec{n} a vektorem Δ je přímo úměrný velikosti vektoru \vec{k} .



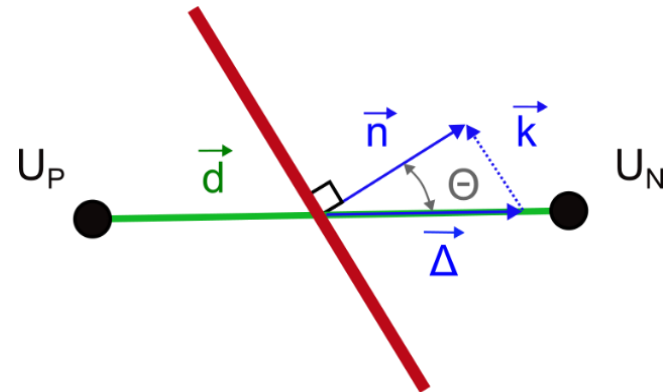
- Platí tedy, že s rostoucím Θ neortogonální korekce roste.
- Z toho plyne, že bychom se měli vždy snažit o **co nejkvalitnější síť**, pokud se chceme **vyhnout obtížím** při výpočtu.

Difúzní člen (10)

- Pro velmi nekvalitní síť mohou být nestability při výpočtu částečně potlačeny vhodnou volbou korekčního faktoru (γ) v neortogonálním členu.

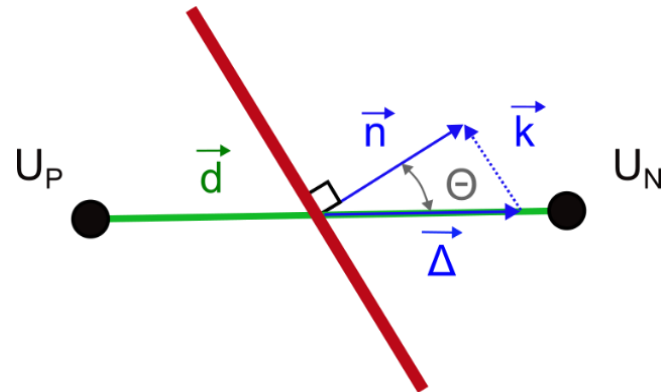
$$\{\nabla \mathbf{v}\}_{\mathbf{fi}} \cdot \mathbf{k}_{\mathbf{fi}} < \gamma \frac{U_P - U_N}{|\mathbf{d}|} |\Delta_{\mathbf{fi}}| \quad (55)$$

- V případě $\gamma < 1$, korekce je použita (**zvýšení stability řešení na úkor přesnosti**).
- V případě $\gamma = 1$, korekce není použita.



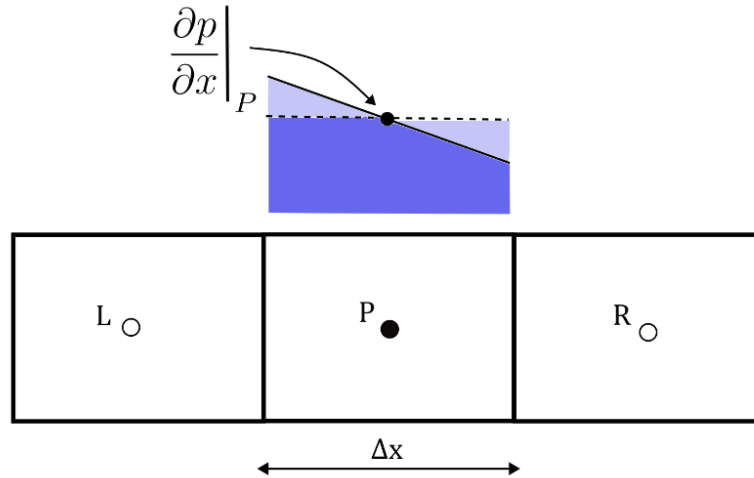
Difúzní člen (11)

- Neortogonální korektory používají aktuální hodnotu rychlosti => nutno iterovat.
- V případě dobré kvality sítě jsou vnější cykly v algoritmu SIMPLE dostačující a pro dosažení konvergence není korekce nutná.
- **V případě špatné kvality sítě** jsou nezbytné dodatečné vnitřní cykly pro řešení rovnice tlaku (pro nestlačitelnou tekutinu), tzv. **neortogonální korektory**.



Tlakový člen

- Připomeňme, že MKO 2. řádu předpokládá lineární průběh veličin napříč objemem (plochou).



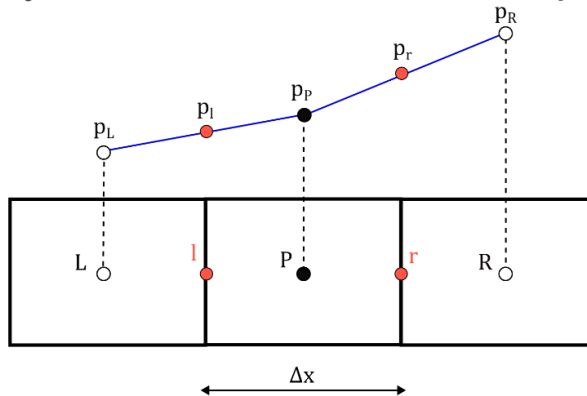
$$-\frac{1}{\rho} \int_V [\nabla p] dV = -\frac{1}{\rho} \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV = -\frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_P V_P \quad (56)$$

Tlakový člen (2)

- Náhrada tlakového gradientu vztahem (57) je jednou z nejjednodušších, avšak za určitých podmínek (často) může vést k oscilacím tlakového pole při řešení.

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_P = \frac{p_r - p_l}{\Delta x} = \frac{p_R - p_L}{2\Delta x} \quad (57)$$

- Gradient tlaku v bodě P závisí na tlaku ve středech L a R, nikoliv na tlaku v bodě P !
- V moderních CFD kódech se využívá tzv. Rhie&Chow interpolace (pokročilé).



Shrnutí přednášky

- **Princip metody konečných objemů**
- **Způsoby diskretizace jednotlivých členů v N-S rovnicích** (konvekce, difúze, zdrojový člen, ..)
- **Neortogonalita** výpočetní sítě – způsoby řešení



Děkuji za pozornost