



# Posouzení kvality výpočetní sítě, klasifikace chyb při numerické simulaci a typy okrajových podmínek

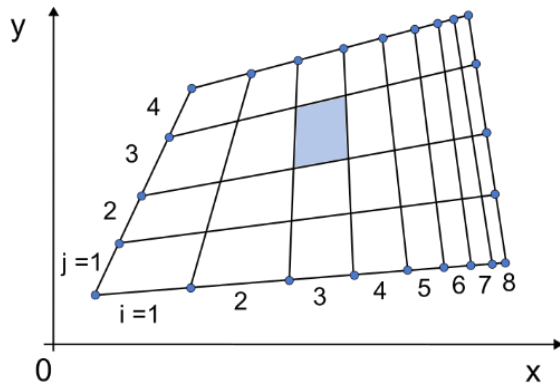
# Obsah přednášky

- Typy výpočetních sítí (struktura, hustota, kvalita)
- Závislost konečného řešení na hustotě sítě
- Druhy chyb při numerické simulaci
- Typy nejčastěji používaných okrajových podmínek (OP)

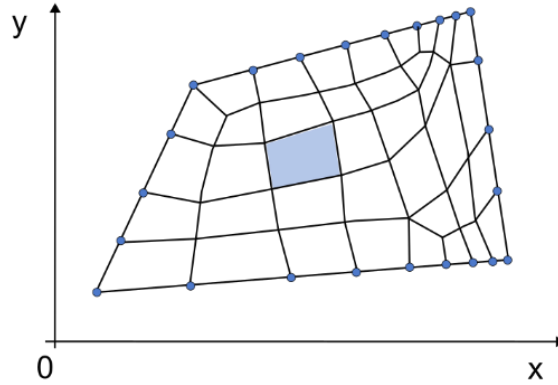
# Typy výpočetních sítí (struktura, hustota, kvalita), závislost konečného řešení na hustotě sítě

# Typy výpočetních sítí

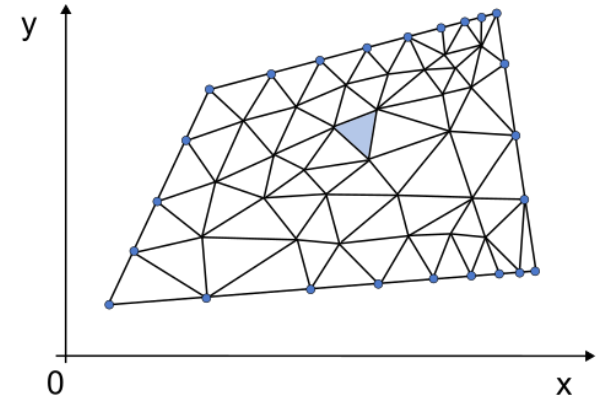
- Většina CFD programů využívá jak **strukturované** tak **nestrukturované** sítě.



**a) Strukturovaná**  
čtyřúhelníková 2D síť (32  
buněk)



**b) Nestrukturovaná**  
čtyřúhelníková 2D síť (38  
buněk)



**c) Nestrukturovaná**  
trojúhelníková 2D síť  
(76 buněk)

## Typy výpočetních sítí (2)

- Existuje celá řada metodik tvorby sítě.
- **Strukturované sítě jsou tvořeny elementy o 4 hranách (2D) nebo 6 stěnách (3D).**
- Každý element/objem je jednoznačně určen pomocí indexů (i, j, k).
- Můžeme číslovat intervaly, jednotlivé objemy nebo uzly (není zde znázorněno).

## Typy výpočetních sítí (3)

- **Nestrukturované sítě jsou obecně tvořeny elementy libovolných tvarů**, ale nejčastěji trojúhelníky a čtyřúhelníky (2D) nebo čtyřstěny a šestistěny (3D).
- U nestrukturovaných sítí nelze jednoznačně identifikovat jednotlivé elementy pomocí indexů (i, j, k).
- Místo toho jsou objemy číslovány odlišným způsobem a tyto informace musí být uloženy v paměti.

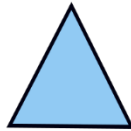
# Typy výpočetních sítí (4)

- Používáme elementy různých tvarů: šestistěny, čtyřstěny, hranoly, pyramidy, ...

## 2D



čtýrúhelník



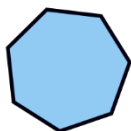
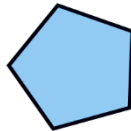
trojúhelník



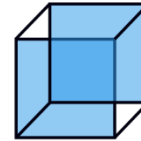
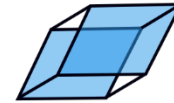
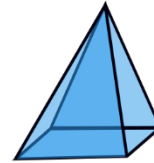
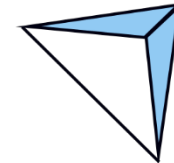
lichoběžník



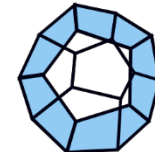
kosodélník

sedmiúhleník  
(heptagon)pětiúhelník  
(pentagon)

## 3D

šestistěn  
(hranol)šestistěn  
(zkosený)pětistěn  
(pyramida)

čtyřstěn

pětistěn  
(hranol)mnohostěn  
(polyhedron)

## Typy výpočetních sítí (5)

- Většinou platí, že pro dosažení srovnatelné přesnosti výsledků je v případě strukturované sítě potřeba méně elementů.
- Pro komplikované geometrie jsou využívány přednosti nestrukturovaných sítí.
- **Bez ohledu na typ použité sítě** je pro dosažení spolehlivých a smysluplných výsledků **důležitá kvalita sítě**, tj. kvalita jednotlivých elementů.

## Typy výpočetních sítí (6)

- **Elementy nesmí být příliš moc šikmé nebo zdeformované**, jinak mohou nastat problémy při výpočtu (konvergence), což může vést k nepřesnému řešení.
- **Důležitá je i globální kvalita sítě**, tj. snažíme se vyhnout náhlým změnám ve velikosti jednotlivých elementů, síť by tedy měla být tvořena pozvolnými přechody mezi elementy a co nejvíc pravidelná (nepřesnosti, stabilita).
- Elementy nesmí v síti chybět ani se nesmí překrývat (existují výjimky).

# Kvalita výpočetní sítě

- **Kvalita sítě má významný vliv na přesnost a stabilitu** numerické simulace.
- Pro posouzení kvality sítě **existuje mnoho různých metrik** (parametrů), často vývojáři kódu volí své vlastní definice a parametry jsou pak mezi různými programy kvantitativně neporovnatelné.
- Proto by měl se měl uživatel o definici daného parametru vždy ujistit v manuálu daného SW.

## Kvalita výpočetní sítě (2)

- Nejčastěji používané parametry jsou **ŠIKMOST** „Equivalent Skewness“ (ES), **ORTOGONÁLNÍ KVALITA** „Orthogonal Quality“ (OQ) a **ŠTÍHLOSTNÍ POMĚR** „Aspect Ratio“ (AR).
- Vždy je nutné kontrolovat kvalitu sítě před samotným výpočtem !
- **Za žádnou cenu nesmí mít ani jeden element záporný objem !!!**

# Šikmost („Equiangle Skewness“)

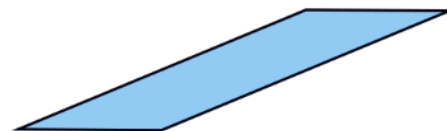
Nulová šikmost

Vysoká šikmost

Čtyřúhelník



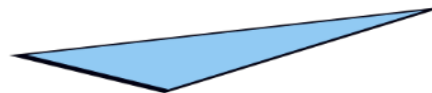
$$\theta_{eq} = 90^\circ$$



Trojúhelník



$$\theta_{eq} = 60^\circ$$



# Šikmost („Equiangle Skewness“) (2)

- „Equiangle Skewness“ (ES):

$$ES = \text{MAX} \left( \frac{\Theta_{\max} - \Theta_{\text{eq}}}{180^\circ - \Theta_{\text{eq}}}, \frac{\Theta_{\text{eq}} - \Theta_{\min}}{\Theta_{\text{eq}}} \right) \quad (1)$$

- $\Theta_{\min}$  a  $\Theta_{\max}$  jsou minimální a maximální úhel ve st. mezi libovolnými dvěma hranami ( $0 \leq ES \leq 1$ ), kde **0 (0% zkosení) je nejlepší a 1 (100% zkosení) je nejhorší.**

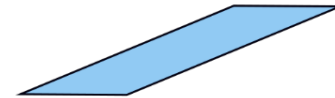
Nulová šikmost

Vysoká šikmost

Čtýřúhelník



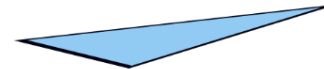
$$\theta_{eq} = 90^\circ$$



Trojúhelník



$$\theta_{eq} = 60^\circ$$



# Šikmost („Equiangle Skewness“) (3)

- **Maximální šikmost** pro síť tvořenou trojúhelníky/čtyřstěny by měla být **nižší než 0,9**.
- $\Theta_{eq}$  je úhel ve stupních mezi libovolnými dvěma hranami ideálního elementu se stejným počtem hran, pro N-hranný mnohoúhelník platí:

$$\theta_{eq} = \frac{180^\circ(N-2)}{N} \quad (2)$$

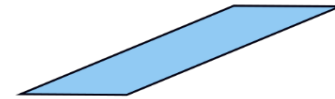
Nulová šikmost

Vysoká šikmost

Čtyřúhelník



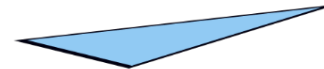
$$\theta_{eq} = 90^\circ$$



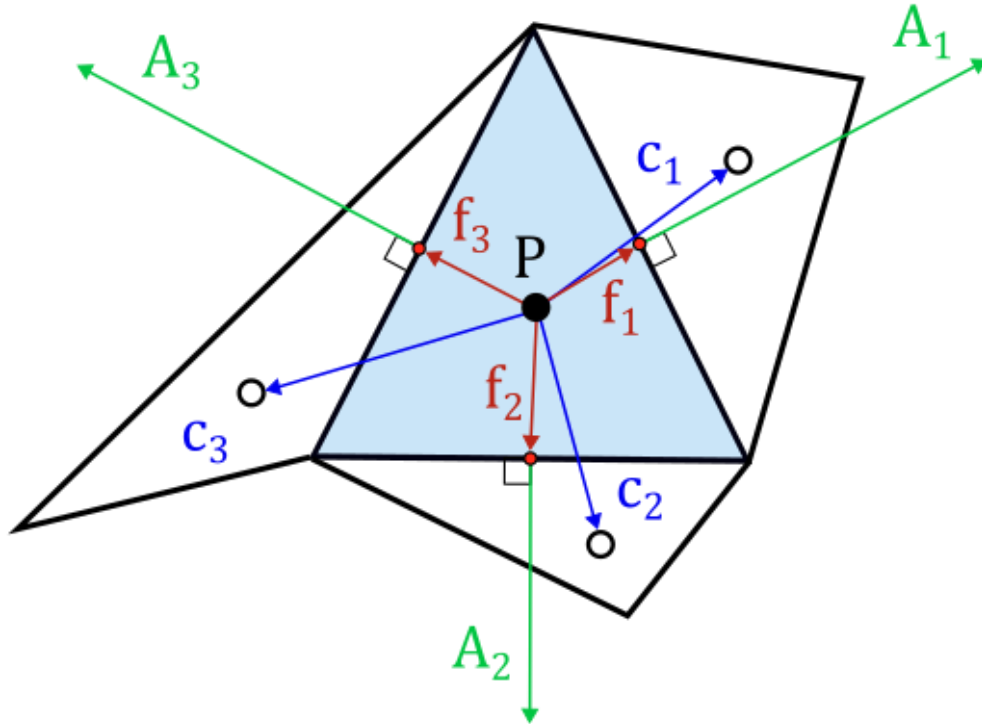
Trojúhelník



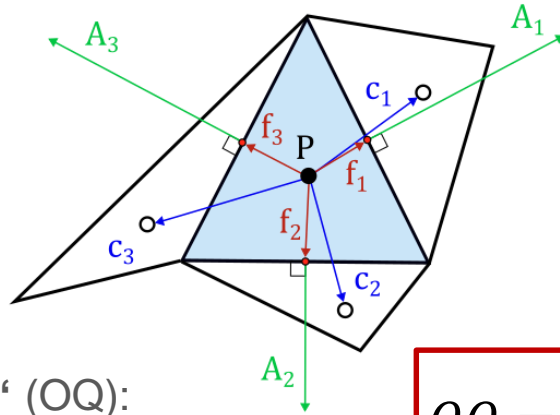
$$\theta_{eq} = 60^\circ$$



# Ortogonální kvalita („Orthogonal Quality“)



# Ortogonalní kvalita („Orthogonal Quality“) (2)



- „Orthogonal Quality“ (OQ):

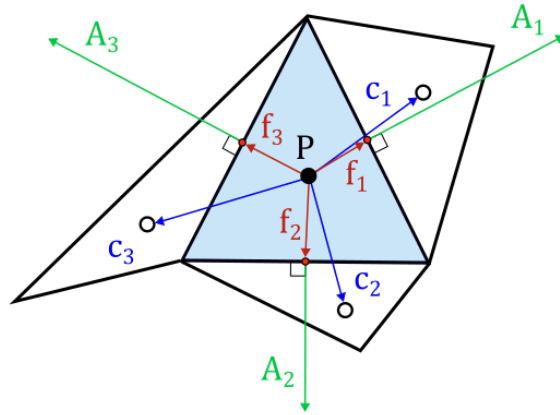
- $A_i$  je vektor vnější normály plochy.

- $f_i$  je vektor ze středu objemu do středu jeho hraniční plochy.

- $c_i$  je vektor ze středu objemu do středu sousedního objemu.

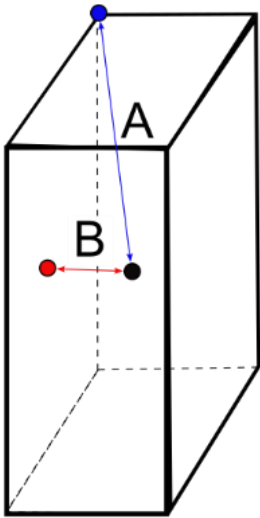
$$OQ = \text{MIN} \left( \frac{\overrightarrow{A_i} \cdot \overrightarrow{f_i}}{|\overrightarrow{A_i}| |\overrightarrow{f_i}|}, \frac{\overrightarrow{A_i} \cdot \overrightarrow{c_i}}{|\overrightarrow{A_i}| |\overrightarrow{c_i}|} \right) \quad (3)$$

# Ortogonalní kvalita („Orthogonal Quality“) (3)



- $0 \leq OQ \leq 1$ , kde **0 (0% ortogonalita)** je nejhorší a **1 (100% ortogonalita)** je nejlepší.
- Minimální OQ pro jakýkoliv typ elementu **by neměla být menší než 0,01 (1%)**, přičemž průměrné hodnoty by měly být podstatně vyšší ( $0,2 < OQ$ ).

# Protažení nebo štíhlostní poměr („Aspect Ratio“)



Čtýřúhelník

Malé protažení



Velké protažení



Trojúhelník



## Protažení nebo štíhlostní poměr („Aspect Ratio“) (2)

- „Aspect Ratio“ (AR):

$$AR = \frac{\text{Nejdelší rozměr}}{\text{Nejkratší rozměr}} = \frac{A}{B} \quad (4)$$

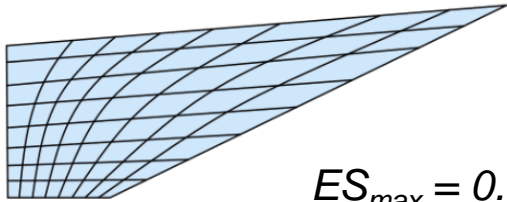
- AR je počítán jako poměr maximální a minimální hodnoty následujících vzdáleností: vzdálenosti mezi středem objemu a středy ohraničujících ploch, vzdálenosti mezi středem objemu a uzly tvořícími tento objem.
- 1 nebo  $1.41 \leq AR < \infty$ , kde **1 (1.41) je nejlepší a  $\infty$  je nejhorší.**

## Kvalita sítě – Tipy a doporučení

- Příliš protažené objemy (vysoké AR) mohou způsobit při výpočtu problémy.
- Počet výpočetních objemů lze často minimalizovat použitím strukturované sítě.
- Nicméně strukturovaná síť nemusí být vždy nejlepší volbou, tvar a geometrie výpočetní oblasti v tom hrají velkou roli.
- **Vysoce kvalitní nestrukturovaná síť je vždy lepší než nekvalitní strukturovaná síť !**

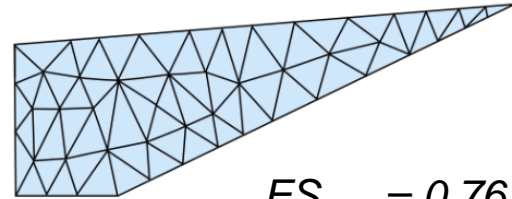
## Kvalita sítě – Typy a doporučení (2)

**Strukturovaná čtyřúhelníková síť**  
(64 objemů)



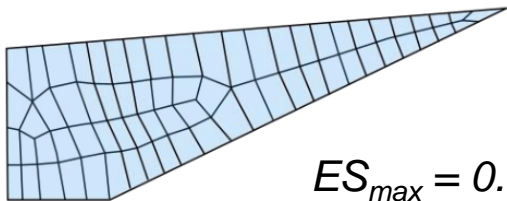
$$ES_{max} = 0.83$$

**Nestrukturovaná trojúhelníková síť**  
(70 objemů)



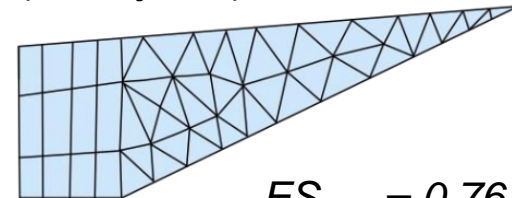
$$ES_{max} = 0.76$$

**Nestrukturovaná čtyřúhelníková síť**  
(67 objemů)



$$ES_{max} = 0.87$$

**Hybridní síť**  
(62 objemů)



$$ES_{max} = 0.76$$

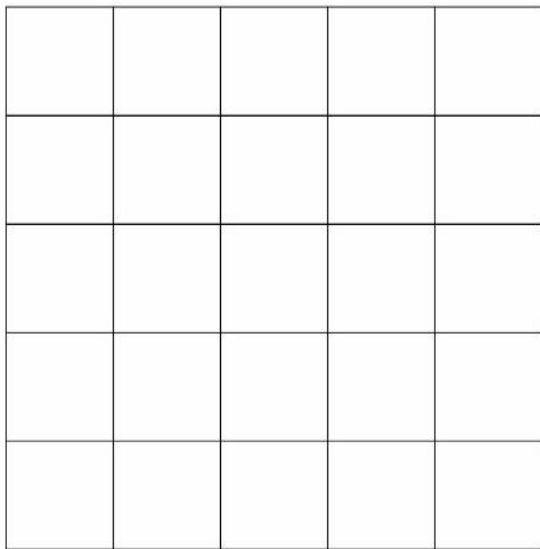
# Hustota sítě

- Reálná **výpočetní oblast je vždy diskrétní.**
- **Pro zachycení důležitých jevů je tak velmi důležitá míra rozlišení**, tj. hustota a rozložení jednotlivých konečných objemů v kritických oblastech výpočetního modelu.
- Mezi takové jevy spadají smykové vrstvy, oblasti odtržení a zavíření, rázové vlny, mezní vrstvy, směšovací oblasti, ....
- Prostorové rozlišení proudění ( 1 objem = 1 hodnota tlaku, rychlosti, teploty, ...).

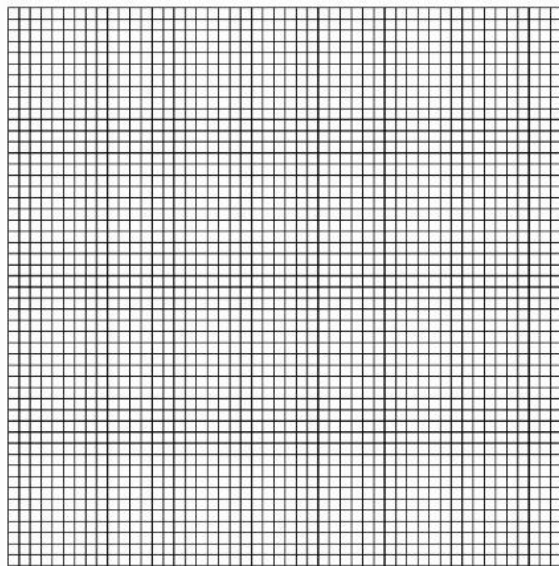
# Hustota sítě

- **Špatné rozlišení** v kritických oblastech **může negativně ovlivnit konečné výsledky !**
- **Rozlišení v blízkosti pevné stěny** (mezní vrstva) **hraje významnou roli v přesnosti** vypočtených tečných napětí na stěně a součiniteli přestupu tepla u stěny.
- Přesnost vs falešná (umělá nebo také numerická) difúze.
- **Vliv hustoty sítě na konečné řešení** (porovnat výsledky nejméně 3 rozdílných hustot).

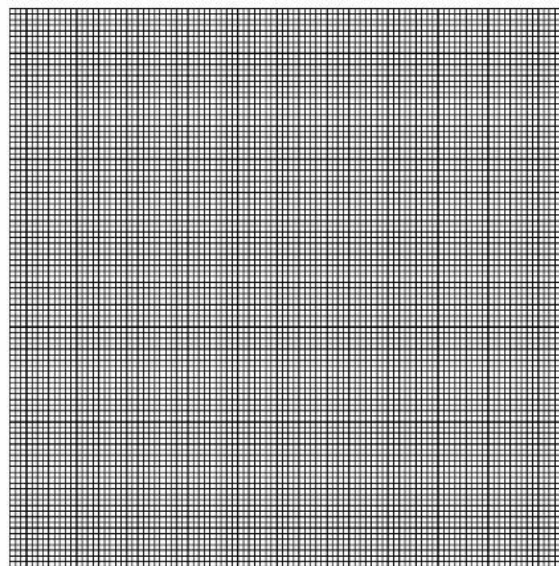
## Hustota sítě (2)



a) **Hrubá síť**  
(5x5), 25 objemů



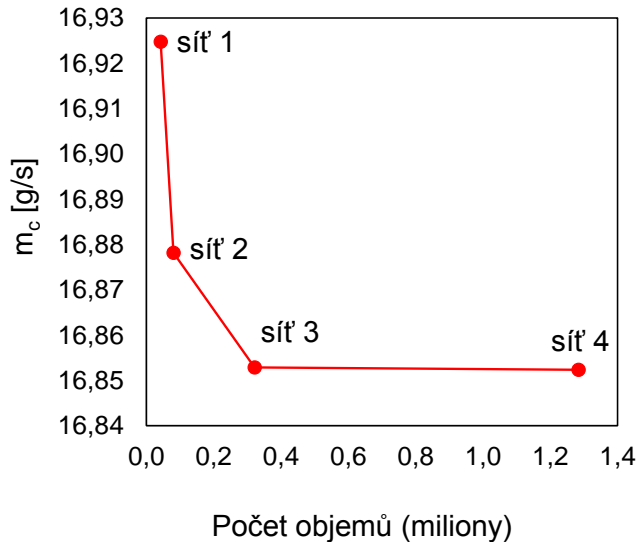
b) **Střední síť**  
(50x50), 2.500 objemů



c) **Jemná síť**  
(100x100), 10.000 objemů

# Závislost konečného řešení na hustotě sítě

- **Vliv hustoty sítě na konečné řešení by měl být vždy ověřen !**
- Vždy se snažíme o nalezení kompromisu mezi přesností a výpočetní náročností.
- Test citlivosti sítě na konečné řešení je **úzce spojen s diskretizační chybou.**



Síť 1 – cca 40.000 objemů

“Hrubá”

Síť 2 – cca 80.000 objemů

“Střední”

Síť 3 – cca 320.000 objemů

“Jemná”

Síť 4 – cca 1.200.000 objemů

“Velmi jemná”

# Druhy chyb při numerické simulaci

# Chyby při CFD výpočtu

- Výsledky CFD výpočtu se budou vždy do jisté míry odlišovat od skutečných hodnot.
- Velikost tohoto rozdílu vyjadřuje **chyba při CFD výpočtu**.
- Výsledná (celková) chyba výpočtu bude vždy kombinací dále uvedených chyb.

## Chyby při CFD výpočtu (2)

### Základní klasifikace chyb při CFD:

- Fyzikální model
- Geometrický model
- Diskretizace oblasti
- Diskretizace rovnic
- Zaokrouhlování (PC nula)
- Iterace (konvergence)

Soustavné (nelze je zcela eliminovat)

- PC programování
- Použití (nepozornost, znalosti)

Hrubé

# Chyby při CFD výpočtu (2)

## Základní klasifikace chyb při CFD:

- Fyzikální model
- Geometrický model
- Diskretizace oblasti**
- Diskretizace rovnic**
- Zaokrouhlování (PC nula)**
- Iterace (konvergence)

Soustavné (nelze je zcela eliminovat)

- ~~Průmyslové zkušenosti~~
- ~~Průmyslové zkušenosti (neobčasná, znalosti)~~

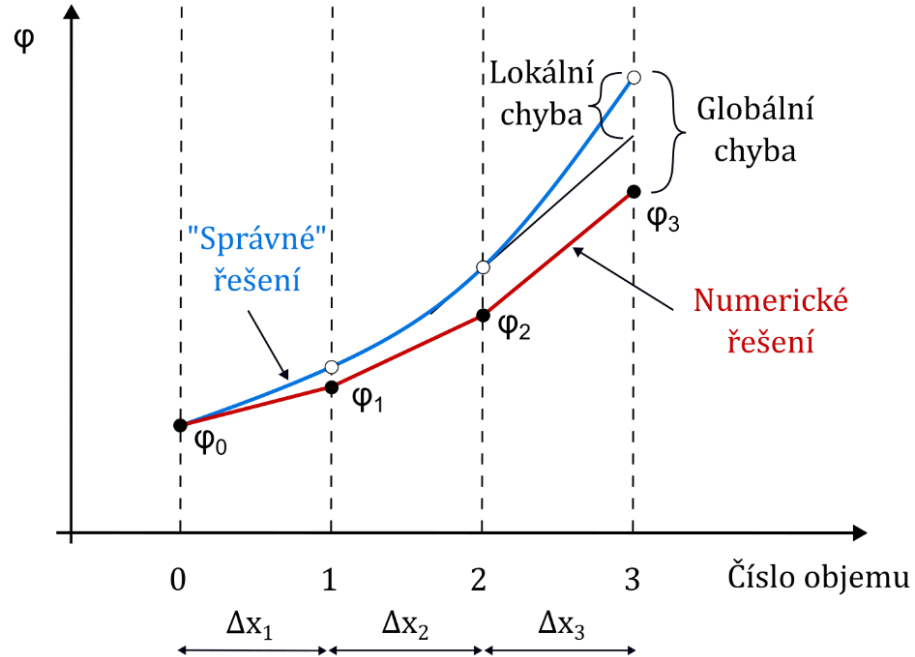
Hrubé

# Diskretizační chyba

- Diskretizační chyba může být důsledkem diskretizace oblasti, rovnic, nebo časové domény. Často se tím myslí jen diskretizace oblasti.

## Diskretizační chyba:

- Lokální chyba
- Globální chyba



# Zaokrouhlovací chyba

- Pokud bychom měli **ideální PC**, který by mohl uchovat libovolný počet čísel na nekonečný počet číslic (desetinných míst), **byla by tato chyba rovna nule**.
- V takovém případě bychom při zanedbání ostatních druhů chyb dostali numerické řešení, které by bylo shodné s přesným řešením.
- Výsledná **chyba záleží na pořadí provedení jednotlivých matematických operací !**

## Zaokrouhlovací chyba:

- Jednoduchá přesnost („Single Precision“)
- Dvojnásobná přesnost („Double Precision“)

## Zaokrouhlovací chyba (2)

Počítač s jednoduchou přesností využívající celkem 7 číslic

Dáno:  $a = 1013251$   
 $b = 1013250$   
 $c = 0.5282817$

Najít:  $D = a - b + c$   
 $E = a + c - b$

Řešení:

$$D = 1013251 - 1013250 + 0.5282817$$

$$= 1.000000 + 0.5282817$$

$$= \boxed{1.528281} \text{ (správné)}$$

$$E = 1013251 + 0.5282817 - 1013250$$

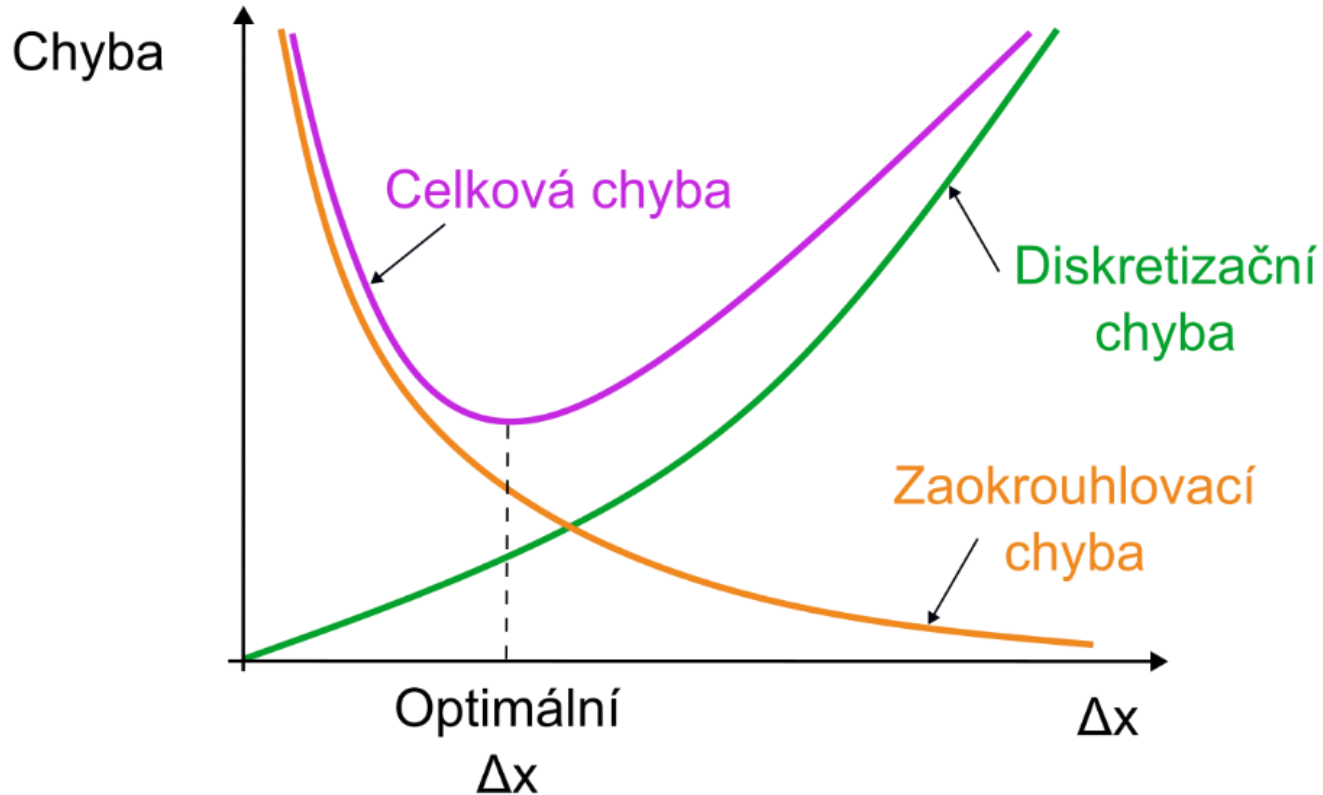
$$= 1013251 - 1013250 + 0.5282817$$

$$= \boxed{1.000000} \text{ (odchylka 34.6%)}$$

# Řízení celkové chyby (diskretizace a zaokrouhlování)

- Zanedbáme všechny ostatních druhy chyb kromě **diskretizační a zaokrouhlovací chyby**.
- **Dostaneme optimální velikost prostorového kroku** (Ize využít také pro časový krok u nestacionárních úloh).
- Velikost prostorového kroku je velikost výpočetní buňky/objemu.
- Výsledkem je **celková chyba** numerického řešení.

# Řízení celkové chyby (diskretizace a zaokrouhlování)



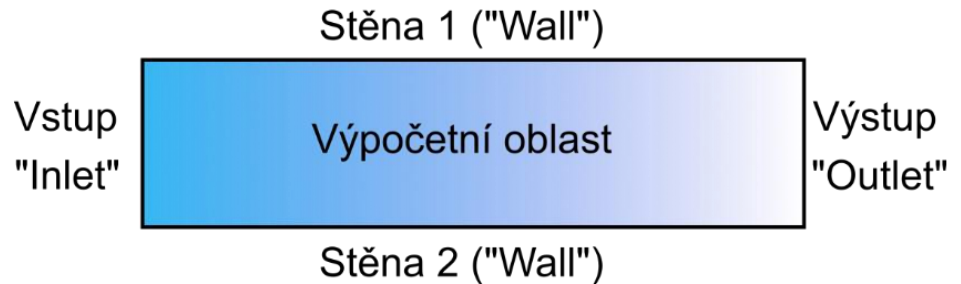
# Typy nejčastěji používaných okrajových podmínek (OP)

# Okrajové podmínky v CFD

- **Vhodné a správně zadané OP jsou pro získání přesných výsledků stěžejní!**

## Obecné typy OP:

- Dirichletova OP (hodnota)
- Neumannova OP (gradient)
- Kombinované a speciální OP



## Specifické typy OP:

- Pevná stěna („Wall“)
- Vstup/Výstup nebo Přítok/Odtok („Inlet/Outlet“ nebo („Inflow/Outflow“ )
- Vnitřní OP („Internal“ nebo „Interior“)
- Další OP (smíšené apod.)

# Okrajová podmínka tuhá stěna

- Jedna z nejpoužívanějších OP v CFD.
- **Tekutina nemůže procházet pevnou stěnou**, normálová složka rychlosti je tedy vzhledem ke stěně rovna nule.
- Pokud je použita podmínka ulpívání tekutiny na stěně („no-slip“), je navíc tečná složka rychlosti rovna nule.
- Pokud je řešena rovnice energetická, musí být specifikována buď teplota stěny nebo tepelný tok stěnou (nikdy obojí!).
- Pro energetickou rovnici existují i komplikovanější typy OP : konvektivní, radiační, kombinované.

## Okrajová podmínka tuhá stěna (2)

- **Lze modelovat i vedení tepla pevnou stěnou** o daném materiálu a dané tloušťce bez nutnosti tvorby sítě stěny (pouze 1D vedení, tj. tepelný tok je kolmý na stěnu).
- Dále můžeme **specifikovat konkrétní hodnotu tečného napětí** na stěně, např. pro nulové napětí lze specifikovat podmínku nevazké tekutiny, kdy tekutina neulpívá na stěně (“Inviscid”).
- Tímto můžeme simulovat například volnou hladinu v bazénu apod.
- Pro turbulentní proudy **lze specifikovat hodnotu drsnosti** na stěně (stěnové funkce), ale často se používá podmínka hydraulicky hladké stěny.

# Vstupní a výstupní okrajové podmínky

- Hranice skrz které tekutina vstupuje („Inlet“, „Inflow“) do výpočetní oblasti nebo z ní vystupuje („Outlet“, „Outflow“).

## Dělení vstupních a výstupních OP:

- Rychlostní OP („Velocity Inlet“, „Mass Flow Inlet“, ...)
  - Tlakové OP (Pressure Inlet, Pressure Outlet, Pressure Farfield, ...)
  - Specifické OP („Outflow“, ...)
- Pokud je řešena rovnice energetická nebo další rovnice pro skalární veličiny (např. turbulence), musí být zadány OP také pro tyto veličiny.

# Vnitřní okrajové podmínky

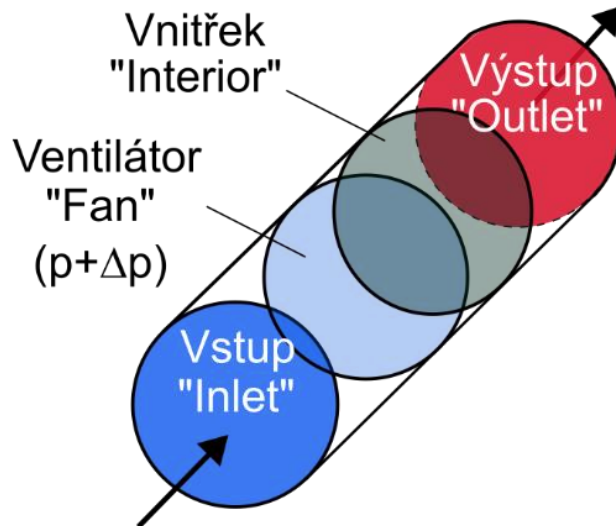
- Některé kódy je označují jako podmínky týkající se „vnitřní“ výpočetní oblasti („Cell Zone Conditions“).
- Jsou specifikovány **UVNITŘ** výpočetní oblasti, **NEDEFINUJÍ hranice oblasti**.

## Dělení vnitřních OP:

- Klasické vnitřní OP („Interior“ – proudění skrz výpočetní oblast)
- Specifické vnitřní OP („Porous Zone“, „Fan“ – lze definovat např. tlakovou ztrátu)

# Vnitřní okrajové podmínky

- Některé kódy je označují jako podmínky týkající se „vnitřní“ výpočetní oblasti („Cell Zone Conditions“).
- Jsou specifikovány **UVNITŘ** výpočetní oblasti, **NEDEFINUJÍ** hranice oblasti.



# Speciální okrajové podmínky

- Nejsou to stěny ani vstupy nebo výstupy.
- **Vynucují si symetrické nebo periodické podmínky** na hranicích modelu.

## Dělení speciálních okrajových podmínek:

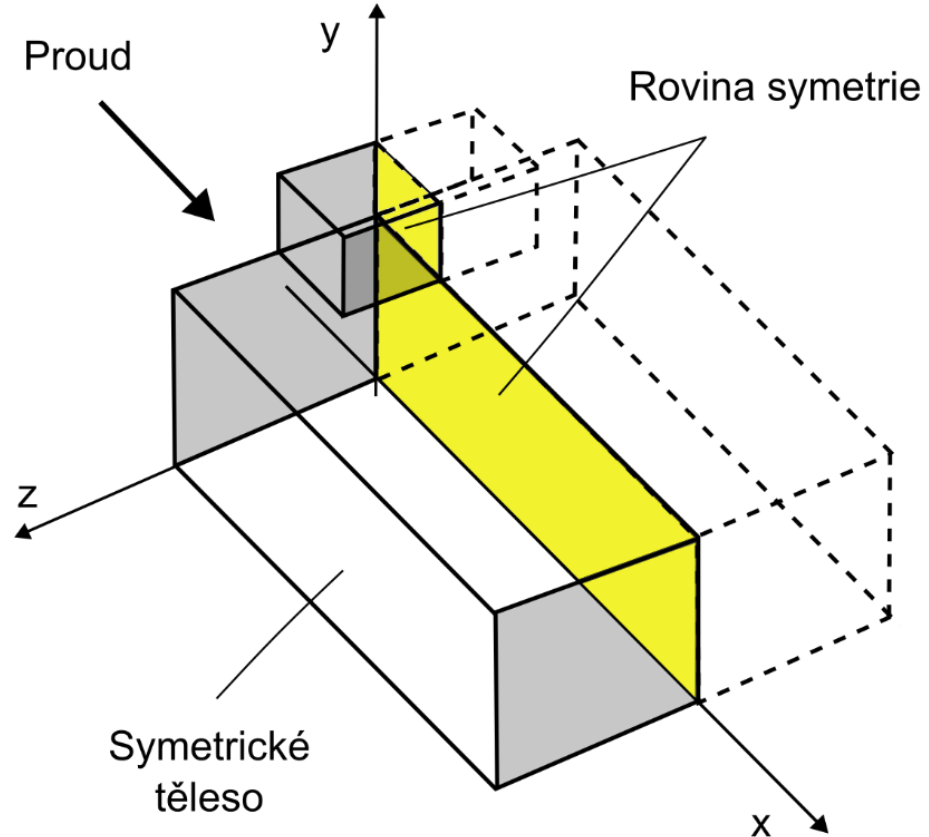
- Periodické OP (translační a rotační)
- Symetrické OP (rovinná nebo osová symetrie)

# Symetrické okrajové podmínky

- Používají se na tzv. „zrcadlení“ proudění – značná úspora výpočetních objemů.
- Lze použít libovolný počet podmínek symetrie.
- Použití např. pro proudění v rovné trubce nebo obtékání symetrického tělesa.
- **Geometrie i proudění musí být symetrické!**
- **Pozor na nesymetrie v proudění**, např. odtržení v difuzoru nebo odtržení na tělese.
- **Proud nemůže procházet symetrickou OP** (na rozdíl od periodické OP, viz dále).

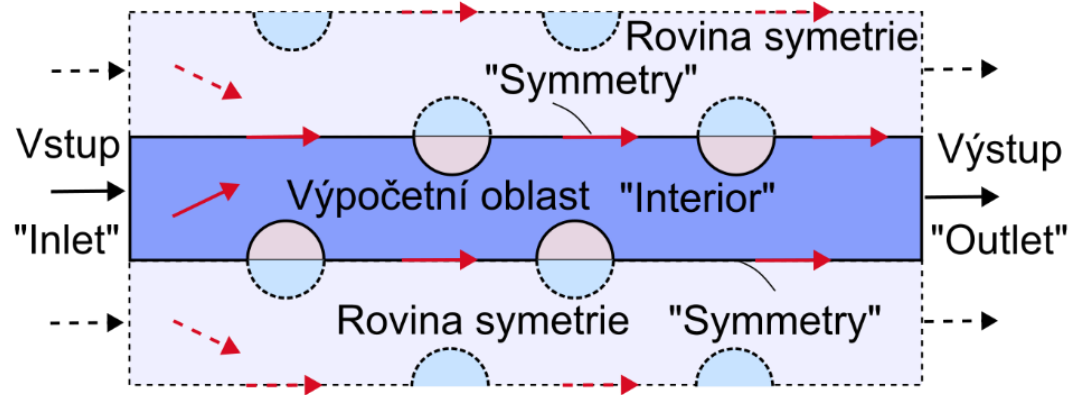
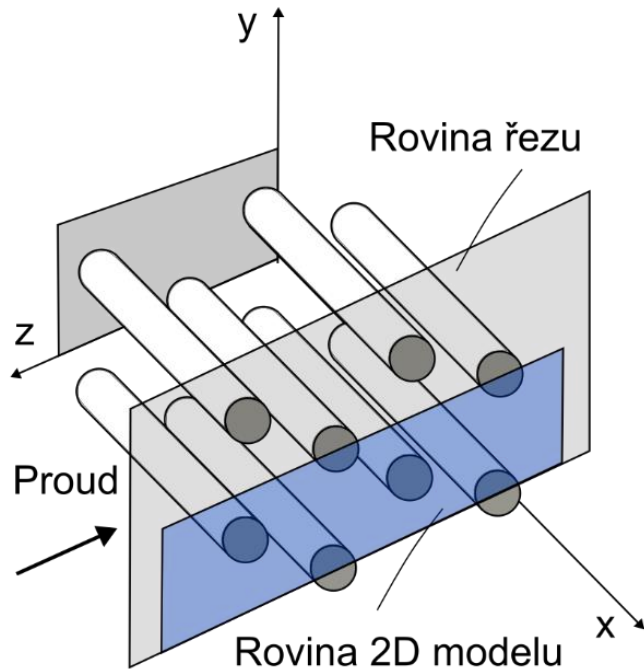
## Symetrické okrajové podmínky (2)

***Rovinná symetrie (3D)***  
***„Plane Symmetry“***



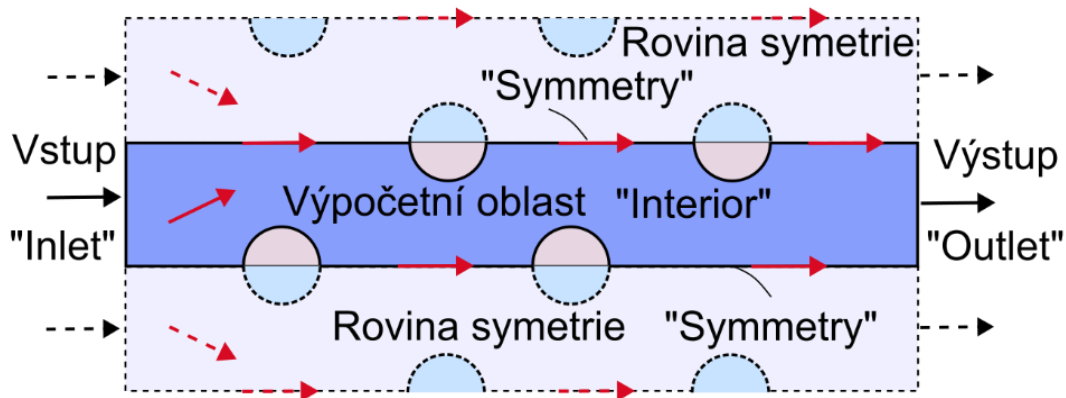
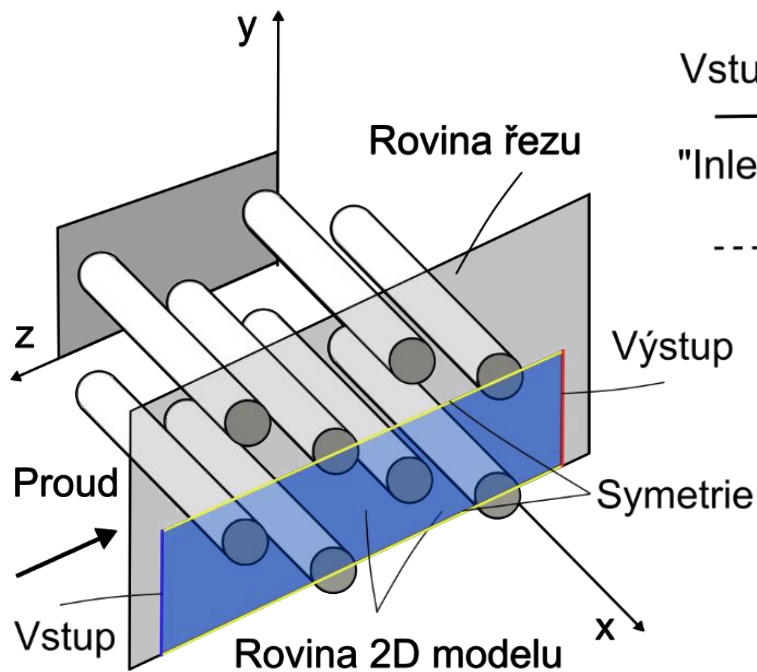
# Symetrické okrajové podmínky (3)

## Rovinná symetrie (2D)



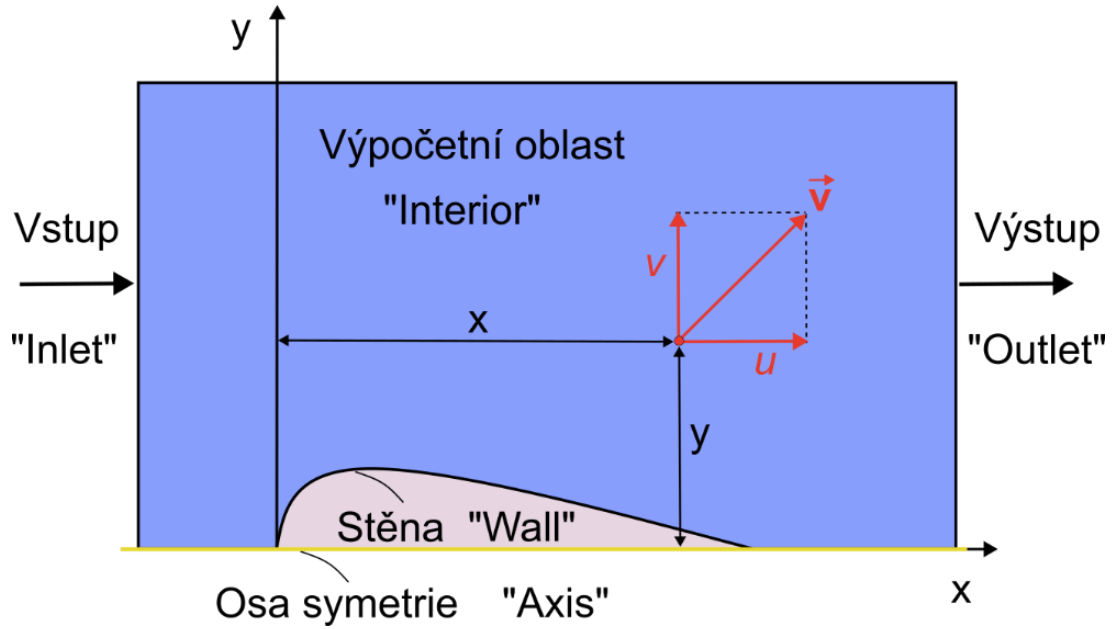
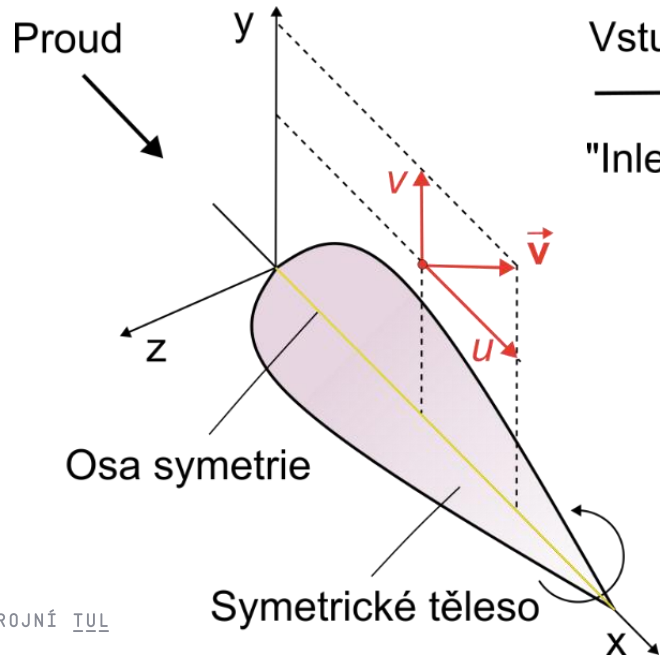
# Symetrické okrajové podmínky (3)

## Rovinná symetrie (2D)



# Symetrické okrajové podmínky (3)

## Osová symetrie (2D) „Axis Symmetry“

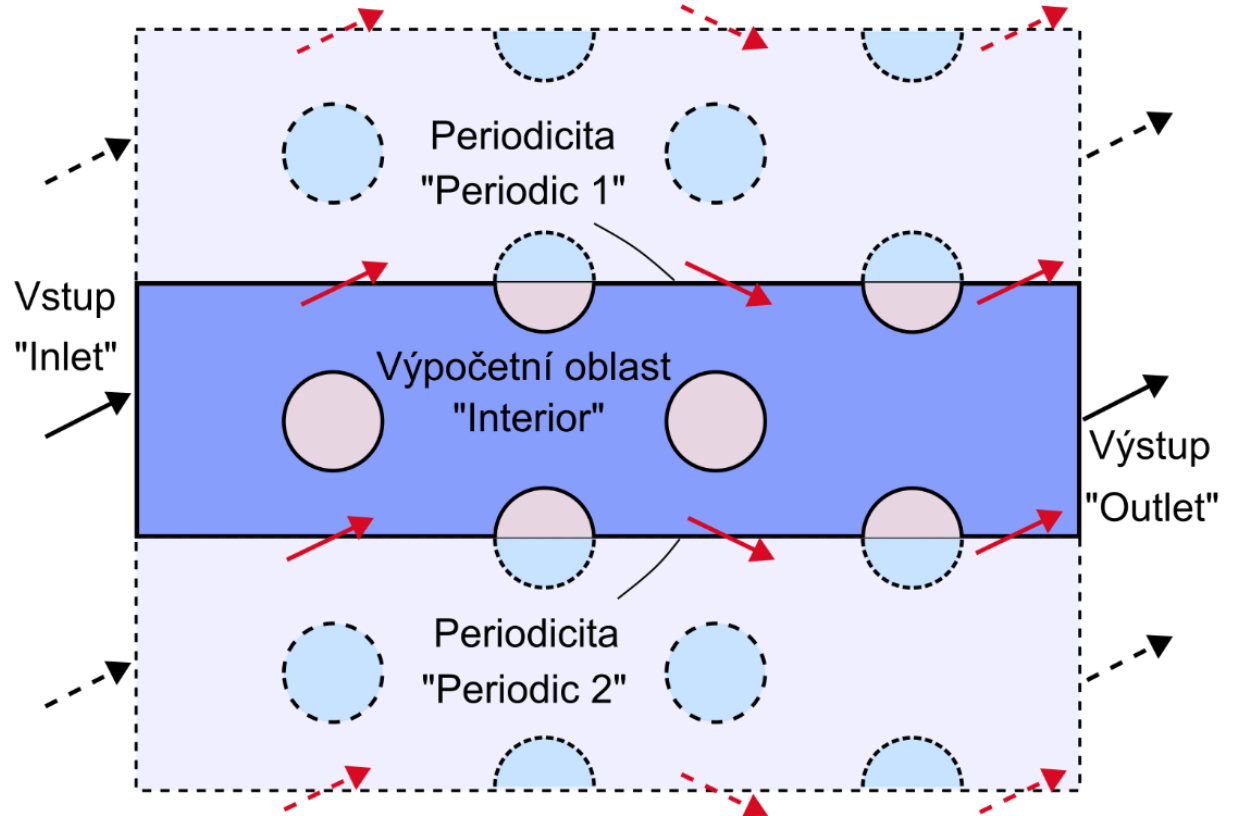


## Periodické okrajové podmínky

- Používají se k **zachycení opakujících se jevů** – značná **úspora výpočetních objemů**.
- **Vždy se vyskytují v páru**: „Periodic 1“ – „Periodic 2“.
- Použití např. pro proudění mezi lopatkami nebo mezi trubkami výměníku.
- **Proud může procházet periodickou OP** (na rozdíl od symetrické OP).
- V případě, že si nejste jisti správností použití dané OP, vždy proveďte nejdříve výpočet na kompletní 3D geometrii !

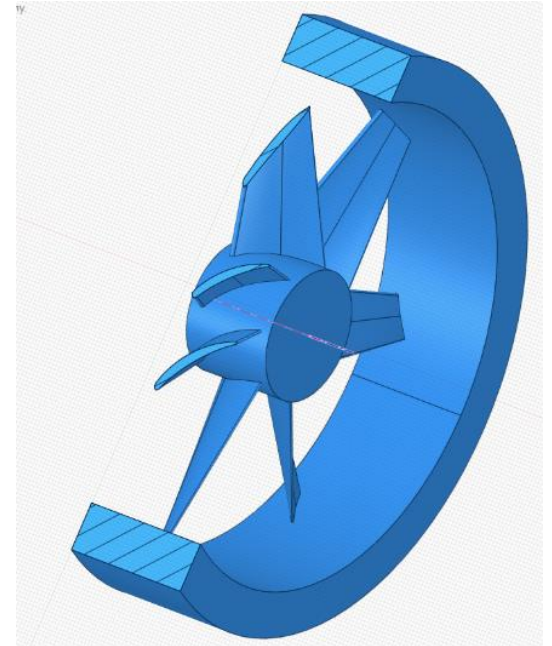
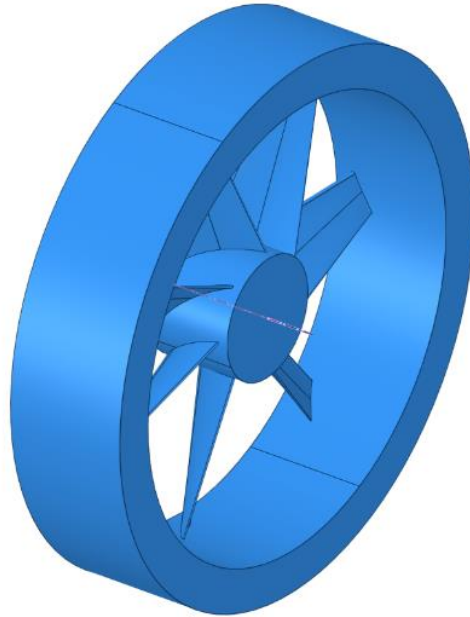
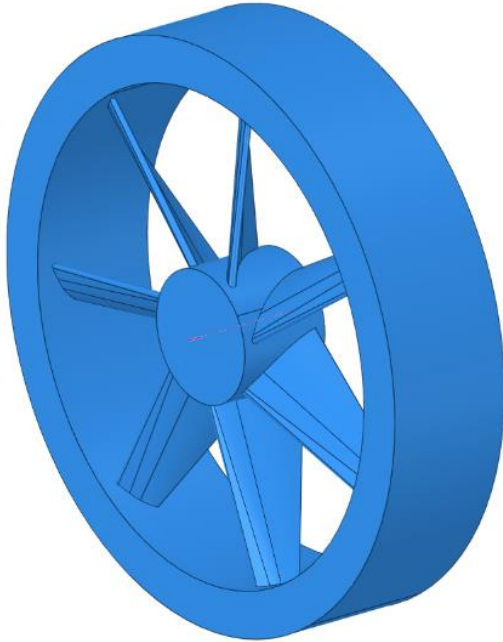
## Periodické okrajové podmínky (2)

### *Rovinná periodicitata*



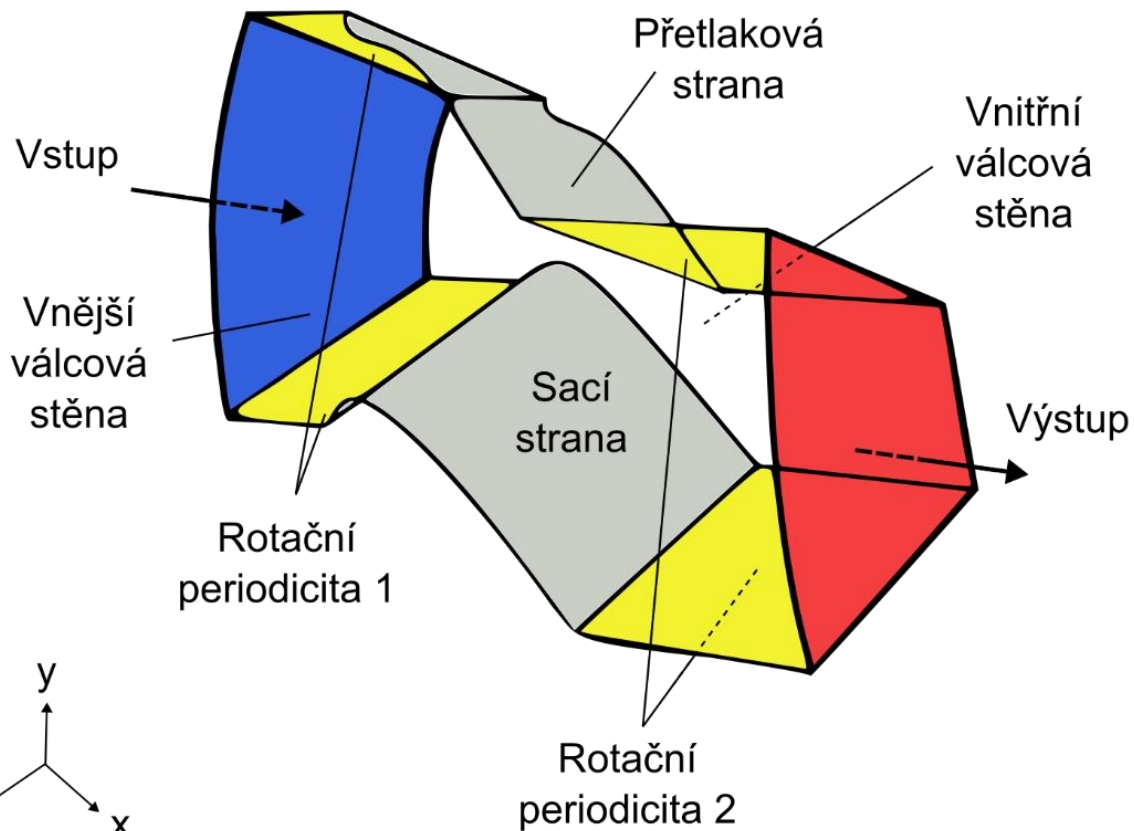
# Periodické okrajové podmínky (3)

## ***Rotační periodicitata***



# Periodické okrajové podmínky (4)

## ***Rotační periodicitata***



# Shrnutí přednášky

- **Kvalita sítě při CFD výpočtu** – velmi důležitá struktura, jemnost, ...
- **Druhy chyb** při numerické simulaci (diskretizace vs. zaokrouhlování)
- **Test nezávislosti sítě** na řešení (diskretizační chyba)
- **Typy** nejčastěji používaných **okrajových podmínek v CFD**



# Děkuji za pozornost